

# Considerazioni sulla curva di Peano

Giancarlo Bassi

9 agosto 2006

## Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Il Contesto: inquadramento storico-critico</b>                                    | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Nozione di curva e di dimensione</b>  | <b>8</b>  |
| <b>3</b> | <b>Definizione informale, intuitiva e costruttiva della curva di Peano</b>           | <b>14</b> |
| 3.1      | Convergenza, continuità e suriettività . . . . .                                     | 15        |
| 3.2      | Approssimazione della curva n-esima al quadrato . . . . .                            | 17        |
| <b>4</b> | <b>Definizione più rigorosa e formale della curva di Peano, (un po' bourbakista)</b> | <b>20</b> |
| <b>5</b> | <b>Proprietà della curva di Peano</b>  | <b>27</b> |
| <b>6</b> | <b>Le curve FASS e la tassellazione del piano</b>                                    | <b>29</b> |
| <b>7</b> | <b>La interpolazione frattale</b>  | <b>29</b> |
| <b>8</b> | <b>La tassellazione di Perron</b>  | <b>29</b> |
| <b>9</b> | <b>Esperimenti al computer: Curve di Peano tracciate con L-sistema</b>               | <b>30</b> |
| 9.1      | Il software . . . . .  | 30        |
| 9.2      | L-sistema . . . . .  | 31        |
| 9.3      | La storia della zuppa di pietre . . . . .  | 33        |
| 9.4      | Due parole sugli autori del software xfractint . . . . .                             | 34        |
| 9.5      | Immagini grafiche ricorsive per la generazione delle curve di Peano . . . . .        | 35        |
| 9.6      | Curva di Peano-Hilbert . . . . .   | 35        |
| 9.7      | Curva di Peano - prima variante . . . . .  | 39        |
| 9.8      | Curva di Peano - seconda variante . . . . .  | 40        |
| 9.9      | Curva di Peano - terza variante . . . . .  | 40        |
| 9.10     | Curve <i>FASS</i> . . . . .  | 42        |

|  |    |
|--|----|
| 9.11 Curve quadratica ed esagonale di Peano-Gosper . . . . . | 45 |
| 9.12 Curva di Peano tridimensionale . . . . .                | 48 |

### Sommario

**Summary: Considerations about Peano's Curve** After a short historical introduction, the 2-dimensional Peano's curve is considered as first fractal curve, starting a new successful science. Its amazing and paradoxical feature was the main reason for a strong critical re-thinking of the dimension concept. In such a way, we want to remark the importance, vastness and success of its consequences, like current studies about fractal objects, opening new unconsidered and promising outcoming views. Finally we are presenting the L-system description for the implementation of the Peano's curve visualization.

**keywords:** curve, topological and fractal dimension, limit curve, experimental and visual mathematics, bourbakist definition, intuitive and constructive definition, L-system

**Sunto:** Dopo una breve introduzione storica, si considera la curva di Peano come la prima curva frattale, che ha dischiuso una nuova feconda scienza. La sua sorprendente e paradossale proprietà è stata fonte di una forte revisione critica del concetto di dimensione. Si vuole commentare in questo modo l'importanza, la vastità e il successo delle sue implicazioni, tra cui anche lo studio odierno dei frattali, che ha aperto insospettite e promettenti prospettive. Segue una descrizione di un L-sistema per una implementazione della visualizzazione grafica della curva di Peano.

**parole chiave:** curva, dimensione topologica e frattale, curva limite, matematica sperimentale e visuale, definizione bourbakista, definizione intuitiva e costruttiva, L-sistema

## 1 Il Contesto: inquadramento storico-critico

Nel 1890 Giuseppe Peano <sup>1</sup>, matematico, logico, iniziatore della meta-matematica, professore all'Università e all'Accademia militare di Torino, persona alquanto schiva, scoprì una curva, una varietà apparentemente ad una dimensione, che ricopriva interamente un quadrato [1] 9.7.

Pubblicò un articolo su *Mathematischen Annalen* dal titolo *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*.



Figura 1: Giuseppe Peano

A quel tempo quasi tutti credettero che la costruzione fosse totalmente priva di senso. Si tenga conto che all'epoca l'Analisi si occupava di due indirizzi: [6]

1. quello tradizionale, che studiava classi di funzioni algebriche, trigonometriche, esponenziali
2. uno più recente, che studiava la continuità di funzioni “generiche”

Il risultato, fortemente controintuitivo, aprì la strada alla riconsiderazione del concetto di dimensione, concetto chiave in topologia e negli “oggetti frattali”, e nella teoria dei “sistemi dinamici” e del “caos”.

Poincaré <sup>2</sup> si chiese esplicitamente come sia possibile che l'intuizione ci possa ingannare in questo modo, mentre Hausdorff <sup>3</sup> scrisse nel 1914 in *Grundzüge der Mengenlehre* che “questo è uno dei risultati più notevoli della teoria degli insiemi”.

Nel 1861 un controesempio di Weierstrass <sup>4</sup> aveva confutato la congettura dell'illustre Ampère <sup>5</sup>, anch'essa sorretta dalla “intuizione”, secondo la quale ogni funzione continua doveva essere anche derivabile in tutto il

---

<sup>1</sup>Giuseppe Peano (1858-1932), matematico italiano

<sup>2</sup>Henri Poincaré (1854-1912), matematico francese

<sup>3</sup>Felix Hausdorff (1868-1942), matematico tedesco

<sup>4</sup>Karl Weierstrass (1815-1897), matematico tedesco

<sup>5</sup>André M. Ampère (1775-1836), fisico francese

dominio, fatta eccezione per alcuni punti isolati. Col suo controesempio, Weierstrass aveva esibito una funzione continua e giammai derivabile su tutto il suo dominio. Oggi ne conosciamo moltissime; sappiamo che sono infinite. L'esempio che dava Weierstrass a lezione era il seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n!}$$

Ma si trova anche sui testi di analisi: [7].

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x)}{10^k}$$

con

$$f_k(x) := 10^k x - p \quad \text{se } p \leq 10^k x \leq p + \frac{1}{2}$$

$$f_k(x) := q - 10^k x \quad \text{se } q - \frac{1}{2} < 10^k x < q$$

Tali curve non sono tuttavia visualizzabili.

Nessuna tangente poteva dunque essere condotta da qualsiasi punto sulla curva !

Secondo Jordan <sup>6</sup> una *curva* è il cammino di un punto che si muove con continuità.

Con la sua curva, Peano mostrò che la definizione di curva data da Jordan è troppo ampia e pertanto inadeguata.

La curva di Peano è la prima curva frattale, che va ad unirsi alla famosa curva a fiocco di neve, studiata poco dopo da von Koch <sup>7</sup> che scrisse al proposito nel 1906 *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes*.

A quel tempo erano considerate solo come stranezze matematiche. ??



Figura 2: Helge von Koch

<sup>6</sup>Camille Jordan (1838-1922), matematico francese

<sup>7</sup>Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924), matematico svedese

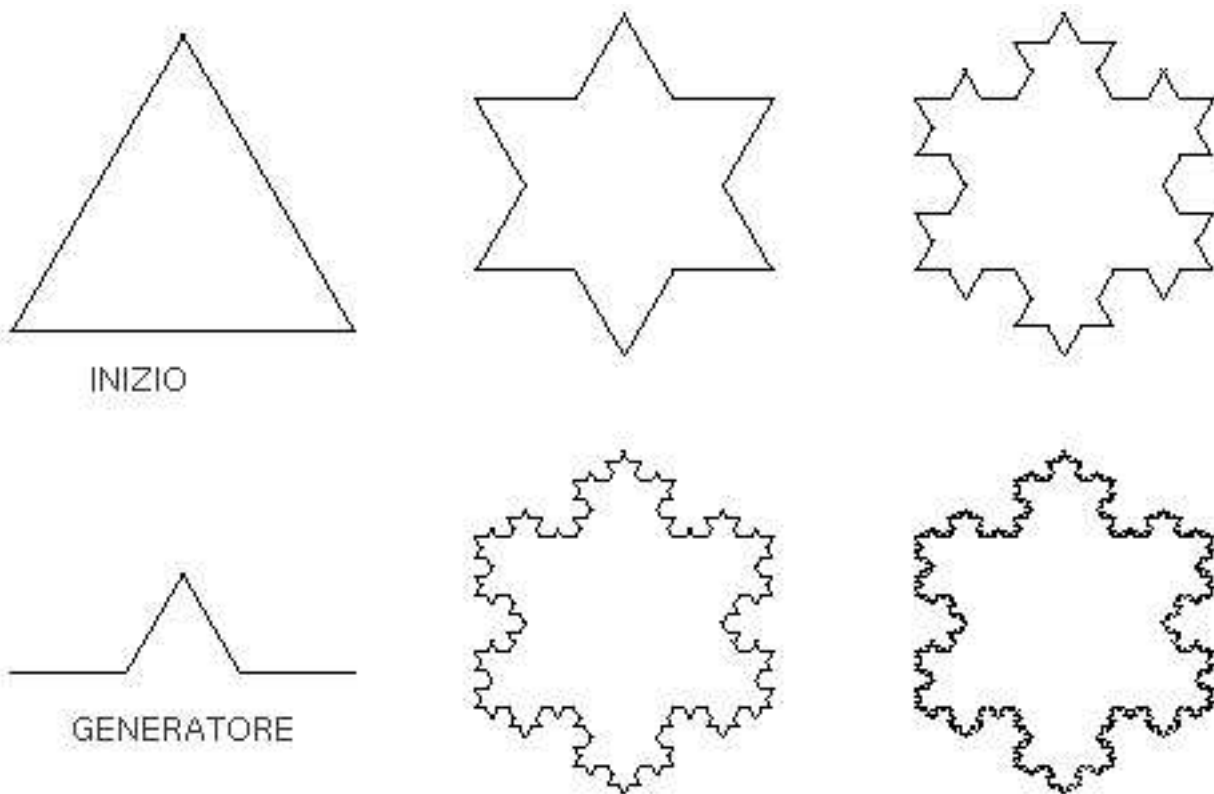


Figura 3: Costruzione della curva di Koch

Hermite <sup>8</sup> ne parlò come di *una piaga lamentevole... da cui distolgo lo sguardo con disgusto*. Abbiamo così da una parte fenomeni che non sono trattati scientificamente, perchè non è possibile ricondurli ad uno schema matematico; dall'altra un *museo degli orrori*, che viene considerato importante solo per la definizione corretta dei concetti base dell'analisi matematica, tuttavia di nessun interesse per le applicazioni alle scienze naturali. [4] Benoît Mandelbrot <sup>9</sup> propone la curva di Koch come un modello sommario della costa di un'isola. Con le parole di Cesaro <sup>10</sup> sulla curva di Peano: "è questa similitudine tra il tutto e le sue parti, perfino quelle infinitesimali, che ci porta a considerare la curva di Peano alla stregua di una linea veramente meravigliosa tra tutte. Se fosse dotata di vita, non sarebbe possibile annientarla senza sopprimerla al primo colpo, poichè in caso contrario rinascerebbe incessantemente dalle profondità dei suoi quadrati, come la vita nell'universo".

Con i primi del 1870 iniziò una crisi del pensiero matematico che durò

<sup>8</sup>Charles Hermite (1822-1901), matematico francese

<sup>9</sup>Benoît Mandelbrot (1924-vivente), matematico polacco

<sup>10</sup>Ernesto Cesaro (1859-1906), matematico italiano

50 anni.

In altre aree della matematica, cominciarono ad insorgere strane strutture. [19]. Poincaré tentò di analizzare la stabilità del sistema solare nel 1880 e trovò che il problema dinamico degli  $n$  corpi resisteva ai metodi tradizionali. Per contro, sviluppò allora un approccio qualitativo, uno *spazio degli stati* in cui ogni punto rappresentava una diversa orbita planetaria, e studiò ciò che noi oggi chiameremmo la topologia – la connettività – dell’intera famiglia di orbite. Questo approccio rivelò che mentre molti moti iniziali si inquadravano subito in curve familiari, c’erano anche orbite strane, *caotiche* che non diventavano mai periodiche e prevedibili. Altri ricercatori, cercando di capire fenomeni *rumorosi*, fluttuanti – le inondazioni del Nilo, le serie di prezzi in economia, le vibrazioni delle molecole nel moto browniano nei fluidi – trovarono che questi modelli tradizionali non potevano corrispondere con i dati osservati. Dovevano introdurre caratteristiche di scala apparentemente arbitrarie, con punte nei dati che diventavano più rare quando crescevano, ma non sparivano interamente.

Per molti anni questi sviluppi apparvero non correlati tra loro, ma c’erano suggerimenti tormentanti di una trama comune. Come le curve dei matematici puri e i moti caotici orbitali, i grafici delle serie di tempo irregolari avevano spesso la proprietà della autosimilarità: una piccola sezione ingrandita appariva molto simile ad una più grande su un ampio intervallo di scale.

Solo con la pubblicazione nel 1977 da parte di Mandelbrot di *The Fractal Geometry of the Nature*



Figura 4: Benoît Mandelbrot

si può parlare di una vera e propria geometria frattale, strumento insostituibile per studiare i fenomeni naturali complessi, non riconducibili ad entità geometriche classiche come il punto, la retta, il quadrato ... [5] Perché allora tanta anticamera, per poi imporsi così rapidamente? [8] La risposta sta nel fatto che l’atteggiamento scientifico aveva avuto una notev-

ole evoluzione: vi era la rinascita dell'atteggiamento geometrico-costruttivo, caratterizzato da una attenzione più intensa agli aspetti qualitativi dei fenomeni e, parallelamente, il ricorso sempre più massiccio alla simulazione tramite calcolatore digitale. Il primo aspetto era testimoniato dal naufragio del progetto bourbakista <sup>11</sup> di rifondazione delle matematiche. La profonda sfiducia sull'intuizione e l'immaginazione era incarnata nel motto di Dieudonné <sup>12</sup>: "Abas Euclide <sup>13</sup> !", in chiave ironica.



Figura 5: Jean Dieudonné

Il bourbakista Dieudonné riteneva che la curva di Peano fosse tanto controintuitiva da essere studiabile solo con la logica e che l'intuizione dovesse invariabilmente fallire nel capirne le proprietà. Il fallimento del piano bourbakista dell'eccesso di attenzione agli aspetti formali e di rigore logico fu determinato da due ordini di fattori:

1. l'impossibilità di dare una fondazione logicamente solida e coerente di tutto l'edificio matematico
2. il bisogno di una maggiore libertà concettuale, che permettesse lo sviluppo di nuovi campi di interesse.

Si trattava dunque dello stesso ordine di fattori che aveva permesso il grandioso sviluppo del calcolo nel XVII e XVIII secolo, fattori che non erano stati prevaricati dalla necessità di una spiegazione rigorosa. Il disprezzo per il livello qualitativo, sancito dal detto di Rutherford <sup>14</sup> *qualitativo è quantitativo mal-fatto*, venne così superato.

---

<sup>11</sup>Bourbaki: società segreta di matematici francesi (Cartan, Weil, Dieudonné, Chevalley, de Possel, Ehresmann, Samuel, Serre, Schwartz, Douady, Lions, Grothendieck, Bruhat, Demazure, Dixmier, Godement, Delsarte ...), costituita nel 1935, ha cambiato il volto della matematica negli anni 1950-70

<sup>12</sup>Jean Dieudonné (1906-1992), matematico francese

<sup>13</sup>Euclide di Alessandria (~ -325 - ~ -265 ) matematico greco

<sup>14</sup>Ernest Rutherford (1871-1937), fisico neozelandese

## 2 Nozione di curva e di dimensione

Se con Cartesio <sup>15</sup> il concetto di curva conquista un ruolo centrale nella filosofia della matematica, sull'idea di dimensione, le connessioni con la letteratura di Edwin A. Abbott <sup>16</sup> in *Flatlandia* e le teorie fisico-matematiche rivoluzionarie di Riemann <sup>17</sup> e di Einstein <sup>18</sup> appaiono evidenti e mostrano una volta di più la portata e l'importanza del concetto.

La loro precisazione come concetti matematici richiederà una lunga e travagliata elaborazione.

Da Wikipedia [3] ricavo la seguente definizione odierna:

Una curva (topologica) è una funzione continua da un intervallo reale in uno spazio topologico; più intuitivamente: è una figura geometrica monodimensionale.

In matematica, una curva è un oggetto unidimensionale e continuo, come ad esempio la circonferenza e la retta. Una curva può giacere su un piano, nello spazio euclideo, o in uno spazio topologico più generale.

Una curva può essere pensata intuitivamente come la traiettoria descritta da un oggetto (puntiforme) che si muove con continuità in qualche spazio, non dovrebbe sorprendere quindi il fatto che per “catturare” nel linguaggio matematico quest'idea si faccia ricorso alle nozioni di funzione continua e funzione differenziabile.

Intuitivamente, siamo abituati a pensare ad una curva piana come ad un oggetto “filiforme” nel piano. Il controesempio della curva di Peano mostra che tale intuizione è in generale sbagliata: infatti questa curva “si muove così tanto” dentro al quadrato da ricoprirlo interamente! In altre parole, la funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{Q} = [0, 1] \times [0, 1]$  che la definisce è suriettiva e continua, ma non iniettiva. [6] 4

Non meno tormentata è la definizione di dimensione topologica, di tipo induttivo, dovuta a Menger <sup>19</sup> e Urysohn <sup>20</sup>, che riprendo dall'articolo di Remmert [9]:

1. uno spazio topologico  $X$  si chiama  $n$ -dimensionale al più, con  $n \leq 1$  nel punto  $x_0 \in X$  se esistono intorno  $U$  di  $x_0$  piccoli a piacere tali che il sottospazio  $\partial U$  è al più  $(n - 1)$ -dimensionale.

---

<sup>15</sup> René Descartes (1596-1650), matematico e filosofo francese

<sup>16</sup> Edwin A. Abbott (1838-1926), letterato, erudito e teologo inglese

<sup>17</sup> Bernhard Riemann (1826-1866), matematico tedesco

<sup>18</sup> Albert Einstein (1879-1953), fisico tedesco-americano

<sup>19</sup> Karl Menger (1902-1985), fisico-matematico austriaco

<sup>20</sup> Pavel Urysohn (1898-1924), matematico russo



2.  $X$  si chiama  $n$ -dimensionale al più, se  $X$  in ogni punto è al più  $n$ -dimensionale.
3.  $X$  si chiama  $n$ -dimensionale in  $x_0 \in X$ , se  $X$  è  $n$ -dimensionale al più in  $x_0$  e non  $n - 1$ -dimensionale al più in  $x_0$ .
4.  $X$  si chiama  $n$ -dimensionale se  $X$  è  $n$ -dimensionale al più e non  $(n - 1)$ -dimensionale al più.
5.  $X$  si dice infiniti-dimensionale se  $\nexists n \in \mathbf{N}$  tale che  $X$  sia al più  $n$ -dimensionale (esempio: lo spazio di Hilbert).

Essa appare come invariante topologico, cioè due spazi topologici omeomorfi devono avere la stessa dimensione.

E da *Fondamenti della topologia* di Alexandrov <sup>21</sup> [10]:

Dimensione generale o brouweriana di un insieme chiuso  $F$  è il minimo numero  $r$  tale che  $F$  possiede dei ricoprimenti  $\epsilon$  dell'ordine  $r + 1 \quad \forall \epsilon > 0$

In Courant-Robbins [11] il *problema delle mattonelle* caratterizza le dimensioni geometriche di una figura qualsiasi.

Si poneva dunque seriamente il problema di che cosa dovesse essere la *dimensione* di un insieme, o, meglio, di un sottoinsieme di  $\mathbf{R}^n$ . Già Cantor <sup>22</sup> aveva fatto notare che il numero di punti non distingue per esempio fra la retta  $\mathbf{R}$  e il piano  $\mathbf{R}^2$ , assegnandone una biiezione [9].

Nella corrispondenza con Dedekind <sup>23</sup> del 1877 esibì la prova che esisteva una corrispondenza biunivoca dall'intervallo  $[0, 1]$  in uno spazio ad  $n$  dimensioni. Cantor stesso ne fu così sorpreso che esclamò: “Lo vedo, ma non lo credo !” , pregando il suo corrispondente di mettere alla prova la dimostrazione.

**Teorema 1**  $\exists f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, f: 1-1, su$

teorema di Cantor, 1877

I due successivi risultati ne danno limitazioni.

**Teorema 2** *La biiezione  $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  scoperta da Cantor non è continua*

(teorema di Netto <sup>24</sup>, 1879).

**Teorema 3**  $\nexists f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m \quad n \neq m \quad f: 1-1, su, \text{ lineare ,}$

<sup>21</sup>Pavel Sergeevic Alexandrov (1896-1982), matematico russo

<sup>22</sup>Georg Cantor (1845-1916), matematico tedesco

<sup>23</sup>Richard Dedekind (1831-1916), matematico tedesco

<sup>24</sup>Eugen Netto (1848-1919), matematico tedesco

(teorema di Brouwer <sup>25</sup>, 1910 [9]).

La teoria degli spazi vettoriali non assegna alcuna dimensione a oggetti curvi come una parabola.

La continuità può aiutare a distinguere le dimensioni? Per esempio, esistono o no biiezioni continue fra il segmento  $[0, 1]$  e il quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ ? La risposta a domande come questa ha richiesto molta fatica. Sappiamo oggi che una funzione  $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  non può essere allo stesso tempo continua, iniettiva e suriettiva (dal risultato di Netto; non si conoscono dimostrazioni elementari).

La curva di Peano mostra che possiamo però rinunciare all'iniettività senza perdere il resto.

Ben diverso è il concetto di dimensione frattale.

Cos'è un frattale? Quali sono alcuni esempi di frattali? [4]

Un frattale è un struttura geometrica frammentata o grezza che può essere suddivisa in parti, ognuna delle quali è (almeno approssimativamente) una copia a dimensioni ridotte dell'intera. I frattali sono generalmente auto-simili ed indipendenti dalla scala. Esistono molte strutture matematiche che sono frattali: il triangolo di Sierpinski, il fiocco di neve di von Koch, le curve di Peano, l'insieme di Mandelbrot e l'attrattore di Lorenz.

Benoît B. Mandelbrot dà una definizione matematica di frattale come di un insieme per il quale la dimensione di Hausdorff Besicovich eccede in senso stretto la dimensione topologica. Comunque, egli non è soddisfatto di questa definizione perchè esclude alcuni insiemi che dovrebbero essere considerati frattali.

Secondo Mandelbrot, inventore del termine:

Ho coniato la parola *frattale* dall'aggettivo latino "fractus" Il corrispondente verbo latino "frangere" significa "rompere" per creare frammenti irregolari.

è pertanto sensibile - e quanto appropriato per le nostre necessità! - che, oltre a "frammentato" (come in "frazione" o in "rifrazione"), "fractus" dovrebbe anche significare "irregolare" , con entrambi i significati preservati in "frammento". (The Fractal Geometry of Nature, pagina 4)

Un L-sistema o sistema Lindenmayer <sup>26</sup> è una grammatica formale per generare stringhe. Cioè, è una collezione di regole tali che sostituiscono  $X$  con  $XYX$ . Applicando ricorsivamente le regole dell' L-sistema ad una stringa iniziale, può essere creata una stringa con struttura frattale. Interpretando questa stringa come un insieme di comandi grafici il frattale può essere

---

<sup>25</sup> Jan Brouwer (1881-1966), matematico olandese

<sup>26</sup> Aristid Lindenmayer (1925-1989), biologo, botanico e matematico ungherese

visualizzato. Gli L-sistemi sono molto utili per generare realistiche strutture di piante.

La dimensione frattale è perciò ben distinta dalla dimensione topologica. Elementarmente in Devaney in *Caos e Frattali* e in Emma Castenuovo [2], nel suo libro divulgativo *Pentole, ombre, formiche: in viaggio con la matematica*, ad un livello immediato ed intuitivo pongono la definizione di dimensione di curva frattale in questi termini:

Se indichiamo con  $s$  il numero di segmenti in cui è stato diviso il segmento di partenza e con  $n$  il numero dei segmenti della poligonale che si vuole generare per ottenere al limite la curva frattale, la dimensione  $d$  della curva frattale risolve l'equazione

$$n = s^d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\log n}{\log s}$$

Per cui la curva di Peano ha dimensione 2, la curva di Helge von Koch ha dimensione  $\frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618595$ , la polvere di Cantor ha dimensione  $\frac{\log 2}{\log 3} = 0.63092975$

Nella figura che segue sono rappresentati i generatori della curva di Koch generalizzata e il generatore della curva di Peano.

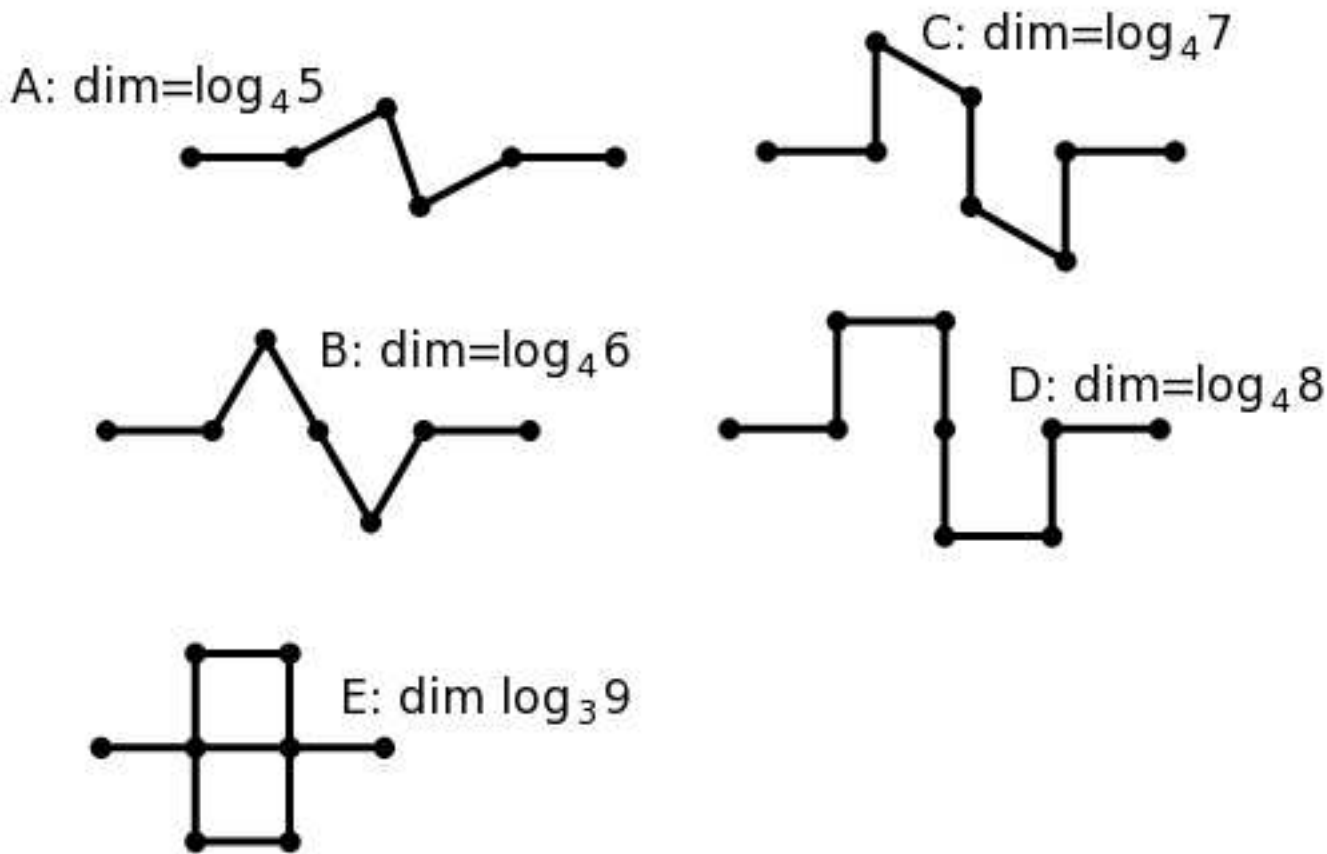


Figura 6: generatori della curva di Koch generalizzata e della curva di Peano

Le curve avranno le dimensioni:

**A** Dimensione=  $\log_4 5 \approx 1,29$ : Curva di Koch generalizzata

**B** Dimensione=  $\log_4 6 \approx 1,40$ : “

**C** Dimensione=  $\log_4 7 \approx 1,16$ : “

**D** Dimensione=  $\log_4 8 = 1,5$ : “

**E** Dimensione=  $\log_3 9 = 2$ : Curva di Peano

Consideriamo ora la definizione di dimensione frattale. [18]

Deve essere un numero che ci dice quanto densamente l'insieme occupa lo spazio metrico in cui si trova; deve avere una certa robustezza ed essere indipendente dalle unità di misura. Sia  $(\mathbf{X}, d)$  uno spazio metrico completo, sia  $A \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  un sottoinsieme compatto non vuoto di  $\mathbf{X}$ , sia  $\epsilon > 0$  e  $S(x, \epsilon)$  una sfera chiusa di raggio  $\epsilon$  centrata in  $x \in \mathbf{X}$ . Vogliamo definire un intero  $\mathcal{N}(A, \epsilon)$  che sia il più piccolo numero di sfere chiuse necessarie per ricoprire l'insieme  $A$ .

In simboli, posto:

$$\mathcal{M} = \{M | A \subset \cup_{n=1}^M S(x_n, \epsilon)\}$$

sia:

$$\mathcal{N}(A, \epsilon) = \min_M \mathcal{M}$$

L'idea intuitiva sotto la dimensione frattale è che un insieme  $A$  ha dimensione  $D$  se:

$$\mathcal{N}(A, \epsilon) \approx C\epsilon^{-D}$$

Occorre fare un bel saltolino di natura formale e concettuale-epistemologico per arrivare alla definizione di Hausdorff-Besicovitch <sup>27</sup> [4]. Questo è un altro numero associato ad un insieme, più robusto e meno pratico della dimensione frattale: alcuni matematici lo amano, molti sperimentalisti lo odiano.

1. In uno spazio euclideo di dimensione  $d = 1$  il contenuto di una sfera di raggio  $\rho$  è  $2\rho$ ,
2. per  $d = 2$  è  $\pi\rho^2$
3. generalizzando su  $d$  è

$$\frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^d}{\Gamma(1 + \frac{d}{2})} \rho^d$$

dove

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

è la funzione di Eulero<sup>28</sup>.

Essa è interpolabile per  $d$  non intero

4. Sia un insieme  $\mathcal{S} \subset \Omega$ , contenuto in una sfera finita. Si può approssimare  $\mathcal{S}$  per eccesso con un insieme finito di sfere di  $\Omega$ , siano  $\rho_m$  i loro raggi, si consideri un raggio massimale  $\rho$  tale che  $\rho_m < \rho$ .

La dimensione di Hausdorff-Besicovitch o dimensione (frattale) di contenuto di  $\mathcal{S} \subset \Omega$  spazio metrico è quel numero  $D$  tale che:

$$d < D \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{\rho_m < \rho} \sum \rho_m^d = \infty$$

$$d > D \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{\rho_m < \rho} \sum \rho_m^d = 0$$

---

<sup>27</sup> Abram Besicovitch (1891-1970), matematico russo

<sup>28</sup> Leonhard Euler (1707-1783), matematico svizzero

### 3 Definizione informale, intuitiva e costruttiva della curva di Peano

Il termine *curva di Peano* si applica genericamente a tutta una famiglia di curve patologiche che dal 1890 al 1925 hanno svolto un ruolo decisivo nell'elaborazione del concetto di dimensione topologica e frattale. [4]

Una curva di Peano viene costruita generalmente come limite di una successione di curve. Un esempio modificato e perfezionato, graficato al computer con un L-sistema (sistema di Lindenmayer) a tartaruga simile al LOGO, la visualizza.

Esso fu costruito da Hilbert <sup>29</sup>, apportando una variante alla costruzione di Giuseppe Peano, con cui eliminava i punti in cui (le approssimazioni del) la curva passava due volte, intersecandosi, pubblicato in *Über stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück* in *Mathematischen Annalen* nel 1891. La curva di Hilbert, possiede come tutti i frattali, una bellezza misteriosa, cionondimeno ha anche applicazioni pratiche, nel mondo dell'informatica, per la indicizzazione di dati. L'esempio di Hilbert è visualizzato con i primi otto passi di questa costruzione: la curva di Peano è la curva che si ottiene al passo di ordine infinito.

Ovviamente, questa definizione è valida solo se posta in modo rigoroso: si deve dimostrare che una tale *curva limite* esiste veramente.

Tuttavia ha l'indubbio pregio di "rendere" l'idea e di essere accessibile a molti.

In ogni passo della generazione della curva che ho descritto ottengo una curva continua che posso pensare parametrizzata da una funzione continua sull'intervallo  $[0, 1]$ . Se si definiscono le parametrizzazioni in modo "ragionevole" si ha che la curva corrispondente ad ogni passo differisce dalla curva del passo precedente di quantità via via sempre più piccole. Si può dimostrare che questa successione di curve è una successione di Cauchy nello spazio di Banach delle curve continue su  $[0, 1]$  e quindi deve convergere ad un punto limite nello spazio delle curve continue: questo limite è la Curva di Peano.

Con esempi analoghi si possono costruire facilmente curve che riempiono spazi di dimensione maggiore, come ad esempio il cubo 9.12, oppure, più in generale, curve definite sull'intervallo aperto  $(0, 1)$  che riempiono interamente un qualsiasi spazio euclideo di dimensione arbitraria.

---

<sup>29</sup>David Hilbert (1862-1943), matematico tedesco

### 3.1 Convergenza, continuità e suriettività

[12]

Considero ora il processo formale di costruzione per induzione della curva di Peano-Hilbert, mostrando come si ottiene come limite di una successione di funzioni uniformemente convergente.

Richiamo la nozione di uniforme convergenza di una successione di funzioni:

**Definizione:** Sia  $D$  un aperto di  $\mathbf{R}$  e  $f_n : D \rightarrow \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N}$  una successione di funzioni su  $D$  a valori in  $\mathbf{R}$ . Si pone  $f_n \rightarrow_{\text{uniformemente}} f \iff \text{def} \forall \epsilon \in \mathbf{R}^+ \exists n(\epsilon) \ni n > n(\epsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in D$

Sussiste la proposizione:

**Teorema 4** *Una successione uniformemente convergente di funzioni continue converge ad una funzione continua.*

La curva di Peano-Hilbert è definita ricorsivamente mediante trasformazioni successive di una curva  $h_1 : [0, 1] \rightarrow Q_0 = [0, 1] \times [0, 1]$  che descrive detta curva.

Supponiamo ora di dividere il quadrato unitario in quattro quadrati di lato  $\frac{1}{4}$  :  $Q_{00}, Q_{01}, Q_{10}, Q_{11}$ , come da figura 7.

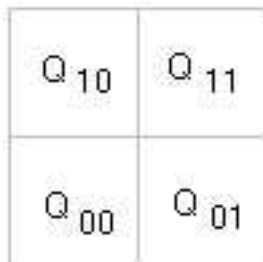


Figura 7: Suddivisione ricorsiva in sottoquadrati

Si costruisce la curva  $h_2$  del passo successivo modificando la curva iniziale in modo che mappi  $[0, \frac{1}{4}] \rightarrow Q_{00}$  ,  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \rightarrow Q_{01}$  ,  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \rightarrow Q_{10}$  ,  $[\frac{3}{4}, 1] \rightarrow Q_{11}$ .

Inoltre, occorre modificare la curva tenendo conto delle rotazioni e dei segmenti addizionali di connessione.

La larghezza degli intervalli quadrati in questo passo ( $n = 2$ ) vale  $\frac{1}{4}$  ; per induzione la larghezza degli intervalli quadrati (o “sottoquadrati”) al passo successivo ( $n = 3$ ) sarà  $\frac{1}{8}$  ed al passo  $n$  sarà  $2^{-n}$ .

In ogni passo si ripete la divisione in quattro intervalli pi piccoli e si applicano le trasformazioni descritte sopra.

Al passo  $n$ , quindi, si ottiene una funzione che mappa il segmento unitario al quadrato unitario:  $h_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ . Per induzione iterando

all'infinito il procedimento esposto si ottiene una funzione il cui grafico è la curva di Peano-Hilbert.

**Teorema 5** *La successione  $h_n$   $n \in \mathbf{N}$  converge ad una funzione continua e suriettiva.*

Si osserva che, per il meccanismo di sostituzione definito, i punti delle curve  $h(n)$  ed  $h(n+1)$  sono sicuramente contenuti nello stesso sottoquadrato di ordine  $n$ , quindi possono giacere ad una distanza massima pari alla diagonale del sottoquadrato di ordine  $n$  (il cui lato misura  $2^{-n}$ ). Ciò significa che:

$$\max_{t \in [0,1]} |h_{n+1}(t) - h_n(t)| < 2^{-n} \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}-n}$$

Ora, applico la disuguaglianza triangolare:

$$|x + y + z| < |x| + |y| + |z|$$

qui nella formulazione stretta perchè gli elementi sono tutti positivi.

Si trova una minorazione per  $|h_{n+m}(t) - h_n(t)|$  introducendo l'artificio di aggiungere e togliere le funzioni di ordine intermedio tra  $n$  ed  $n + m$  e applicando la disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} |h_{n+m}(t) - h_n(t)| &= \\ |h_{n+m}(t) - h_{n+m-1}(t) + h_{n+m-1}(t) \dots - h_{n+1}(t) + h_{n+1}(t) - h_n(t)| &< \\ |h_{n+m}(t) - h_{n+m-1}(t)| + \dots + |h_{n+1}(t) - h_n(t)| &< \\ 2^{\frac{1}{2}-(n+m-1)} + \dots + 2^{\frac{1}{2}-(n+1)} + 2^{\frac{1}{2}-n} &= 2^{\frac{1}{2}-n} \sum_{j=0}^{m-1} 2^{-j} \end{aligned}$$

Tenendo conto della somma dei termini di una progressione geometrica:

$$\sum_{j=0}^n x^j = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

la sommatoria precedente si può stimare:

$$\sum_{j=0}^{m-1} 2^{-j} = \frac{(2^{-1})^m - 1}{2^{-1} - 1} = -2(2^{-m} - 1) = 2 - 2 \cdot 2^{-m} < 2$$

e quindi

$$|h_{n+m}(t) - h_n(t)| < 2^{\frac{1}{2}-n} \cdot 2 < 2^{\frac{3}{2}-n}$$

Una successione  $a_i$  viene detta di Cauchy se

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} |a_m - a_n| = 0$$



o, equivalentemente, se

$$\forall m \in \mathbf{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_m - a_n| = 0$$

Poichè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{3}{2}-n} = 0$$

la successione di funzioni  $h_n, n \in \mathbf{N}$  è di Cauchy e converge.

Inoltre, la convergenza è uniforme perchè vale  $\forall t \in [0, 1]$  e le singole funzioni  $h_i$  sono continue, per costruzione.

Il teorema 4 per cui una successione uniformemente convergente di funzioni continue (e derivabili) converge ad una funzione continua (e derivabile) [7] ci assicura che esiste la funzione limite della successione  $h_i$ , che descrive la curva di Peano-Hilbert  $h(t)$  che è continua.

Inoltre, la funzione  $h(t)$  è suriettiva poichè  $\forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , possibile determinare un valore del parametro  $t_0$  tale che la successione di valori  $h_i(t_0)$  sia via via più vicina alla coppia selezionata o, più formalmente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t_0) = (x, y)$$

Questo risultato si ottiene osservando che  $\forall (x, y)$  la curva di ordine  $n$  passa sicuramente all'interno del sottoquadrato di ordine  $n$  che la contiene, cioè  $(x, y)$  dista dalla curva sicuramente meno della diagonale del sottoquadrato, ovvero:

$$dist_{eucl}((x, y) - h_n(t_0)) < 2^{\frac{1}{2}-n} \rightarrow 0 \quad per \ n \rightarrow \infty$$

pertanto:

$$h([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$$

cioè la funzione  $h(t)$  è suriettiva  $\square$ .

### 3.2 Approssimazione della curva n-esima al quadrato

La curva di Peano  $\mathcal{P}$  riempie il quadrato, in simboli:

$$\forall (x, y) \in \mathbf{Q} = [0, 1] \times [0, 1] \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{P}$$

in altre parole, posta la distanza euclidea tra due punti:

$$d_{eucl}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

e tra un punto  $(x, y)$  e una curva  $\mathcal{C}$

$$d(\mathcal{C}, (x, y)) = \min_{(r, s) \in \mathcal{C}} d_{eucl}((x, y), (r, s))$$

allora

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \forall \epsilon > 0 \quad \exists n(\epsilon) \quad \ni \quad n > n(\epsilon) \Rightarrow d(\mathcal{P}_n, (x, y)) < \epsilon$$

Utilizzando la notazione in base 2 mostrerò che la distanza di un punto di una certa approssimazione della curva da un qualunque punto del quadrato è minore di ogni  $\epsilon \in \mathbf{R}$  prefissato. Il centro di un quadrato ha coordinate che ammettono una rappresentazione finita in base 2. Poichè ogni numero reale può essere rappresentato in base 2, la successione delle sue approssimazioni che si ottengono troncandolo è una successione di Cauchy che, poichè  $[0, 1]$  è compatto, ammette limite. Essendo il quadrato un insieme completo (compatto), perchè chiuso e limitato, in esso ogni successione di Cauchy converge. La successione dei vertici di una curva approssimante è di Cauchy; i punti possono essere scritti con coppie di numeri espressi in notazione in base 2. Sequenza di 0 e 1, per individuare un vertice della curva. 0 se la curva procede in verticale, 1 se procede in orizzontale. Ogni numero reale può essere approssimato bene quanto si vuole da un numero razionale perchè  $[0, 1]$  è compatto, quindi tutte le successioni di Cauchy convergono.

Sia  $A_n = \{1, \dots, 4^n\} \subset \mathbf{N}$  l'insieme dei primi  $4^n$  numeri naturali e sia  $P_n$  la n-esima approssimazione alla curva di Peano  $P$ , ossia con  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ , in cui questa scrittura assume un senso in base alle proposizioni che seguono. Ad ogni passo, ogni parte del quadrato  $\mathbf{Q} = [0, 1]^2$  è suddivisa in quattro parti.

La n-esima approssimazione  $P_n$  stabilisce una numerazione, e quindi anche una corrispondenza biunivoca, tra  $A_n$  e (i centri dei)  $4^n$  quadratini in cui il quadrato viene suddiviso: sia essa  $\mathcal{P}_n$

$$\mathcal{P}_n : A_n \rightarrow \mathbf{Q} = [0, 1]^2 \quad (1)$$

$$\alpha_i \rightarrow (x_i, y_i) \quad (2)$$

$$(3)$$

Ogni  $x \in [0, 1]$  può essere approssimato arbitrariamente bene con la sua espressione binaria troncata alla i-esima cifra  $x_i$ , in simboli:

Posto:

$$x_i = 0, \overbrace{\dots \alpha_i \dots}^n$$

,

$$x_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k 2^k \quad \text{con} \quad \alpha_i = \delta_i^j$$

si ha:

$$\forall n > i \quad |x - x_i| < \frac{1}{2^i}$$

Ogni  $x_i$  è l'ascissa (l'ordinata) di uno dei quadratini ottenuto con le suddivisioni successive. Con le bisezioni successive del segmento  $[0, 1]$  si pone 0 se si sceglie la metà di destra e 1 se si sceglie quella di sinistra.

#### 4 Definizione più rigorosa e formale della curva di Peano, (un po' bourbakista)

[6]

Sia:

$$C_0 = [0, 1]$$

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

...

Si definisca l'insieme come segue:

$$\mathcal{C} := \bigcap_{i \in \mathbf{N}} C_i$$

Tale insieme è anche detto la *polvere di Cantor*



Figura 8: verso la polvere di Cantor

Ha diverse proprietà sorprendenti, tra cui l'essere chiuso e di avere la cardinalità del continuo. [4]

Tutti i  $C_n$  sono chiusi in  $\mathbf{R}$ , perchè unione di un numero finito di intervalli chiusi. Quindi anche  $\mathcal{C}$  è chiuso, perchè intersezione di una famiglia di insiemi chiusi. Gli insiemi  $C_n$  sono poi anche inscatolati:  $C_0, C_1, C_2, C_3 \dots$  e diventano via via più piccoli al crescere di  $n$ . Non potrebbe succedere che  $\mathcal{C}$  fosse vuoto? No, perchè ad esempio i punti 0 e 1 appartengono a tutti i  $C_n$  e quindi anche all'intersezione. Più in generale, gli estremi di uno qualsiasi degli intervallini di cui è composto  $C_n$  non verranno mai tolti dai passaggi successivi. Ogni volta poi il numero di estremi raddoppia, come si dimostra per induzione. Quindi  $\mathcal{C}$  contiene almeno l'insieme numerabile di tutti tali estremi. Ma non è finita qui. ...

Definiamo ora la funzione  $T$  (ternarizzazione). e Scegliamo a piacimento uno dei due pezzi di cui è composto  $C_1$  e prendiamo nota della scelta nel modo seguente:

$$a_1 = 0 \text{ se è quello di sinistra} \quad a_1 = 2 \text{ se è quello di destra}$$

(Il perchè di 0 e 2 sarà più chiaro nel seguito, ma non è già ora completamente irragionevole se si pensa che il numero 1 corrisponde al segmento di mezzo che è stato scartato). Ora concentriamoci sul segmentino preferito e in  $C_2$  scegliamo una delle due parti che ne sopravvivono. Scriviamo

$$a_1 = 0 \text{ se è quello di sinistra} \quad a_1 = 2 \text{ se è quello di destra}$$

E continuiamo così: ad ogni passaggio ci restringiamo nel terzo di sinistra (scrivendo 0) oppure nel terzo di destra (scrivendo 2). In qualunque modo facciamo le infinite scelte, otteniamo: a. una successione di scelte fra sinistra e destra, che codifichiamo come una applicazione  $a : \mathbf{N} \rightarrow \{0, 2\}$ ; b. una successione di intervalli inclusi (il successivo è incluso nel precedente) e chiusi (perchè gli estremi non vengono mai scartati). Per un noto teorema esiste almeno un punto in comune a tutti questi intervalli. Poichè l'ampiezza dell'intervallino al passo  $n$  è  $3^{-n}$ , l'intersezione contiene uno e un solo punto. Abbiamo dunque definito una applicazione  $T$  avente per dominio l'insieme  $\{0, 2\}^{\mathbf{N}}$  delle successioni di scelte e codominio l'insieme  $\mathcal{C}$  di Cantor. L'applicazione è iniettiva. Infatti se due successioni  $a$  e  $b$  sono diverse, esiste (per definizione di diversità) almeno un  $n$  tale che  $a_n \neq b_n$ . Prendiamo il più piccolo fra tali  $n$ . Allora le successioni  $a$  e  $b$  ci conducono al passo  $n$ -esimo a scegliere due sottointervalli disgiunti dello stesso intervallino. Il punto di  $\mathcal{C}$  individuato da  $a$  appartiene ad uno dei sottointervalli, mentre quello individuato da  $b$  sta nell'altro. I due punti non possono quindi coincidere.  $T$  è anche suriettiva. Infatti un punto  $x \in \mathcal{C}$  è individuato da quella particolare successione in cui le scelte non sono a capriccio, ma sono dettate dalla risposta a "il punto  $x$  sta nella parte a sinistra o in quella destra?". Dunque l'insieme di Cantor  $\mathcal{C}$  e l'insieme  $\{0, 2\}^{\mathbf{N}}$  sono equipotenti. Dato che  $\{0, 2\}^{\mathbf{N}}$  ha la stessa cardinalità di  $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ , l'insieme di Cantor ha la potenza del continuo.

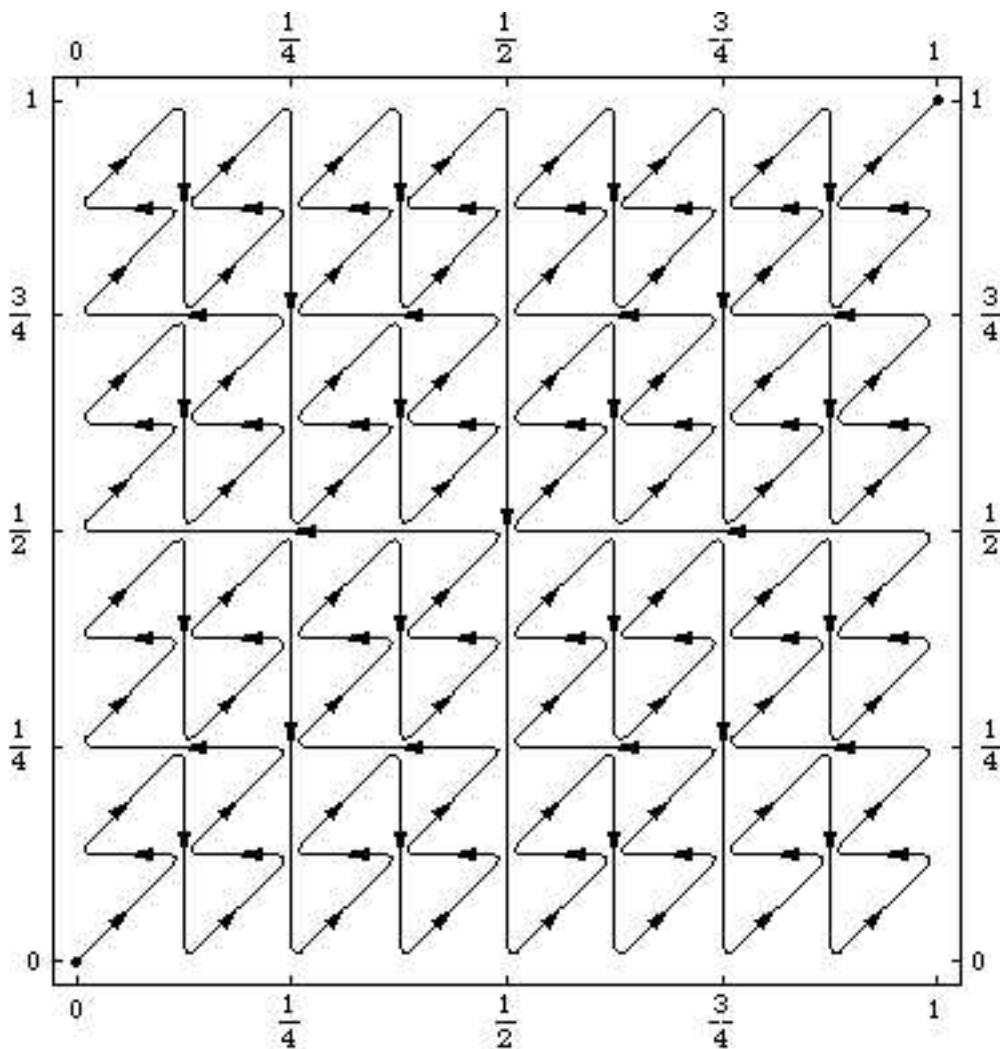


Figura 9: una iterazione per la curva di Peano come sotto definita

La curva di Peano della figura verrà costruita in due fasi. Dapprima verrà definita una funzione continua e suriettiva  $\gamma$  dall'insieme di Cantor in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Assegneremo poi il valore di  $c(x)$  come  $\gamma(x)$  se  $x \in \mathcal{C}$  e opportunamente se  $x \notin \mathcal{C}$ , in modo tale che il risultato sia continuo e l'immagine non fuoriesca dal quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

L'idea di base è la stessa che dimostra che il segmento è equipotente al quadrato: da un'espansione  $p$ -adica possiamo ricavarne due prendendo per una le cifre di posto dispari e per l'altra le cifre di posto pari.

Sia  $B$  (binarizzazione) la funzione:

$$B : \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1] \quad B(a) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k/2}{2^k}$$

Chiamiamo con  $\sigma$  il seguente sdoppiamento, nella forma ternaria che ci interessa:

$$\sigma : \{0, 2\}^{\mathbf{N}} \rightarrow \{0, 2\}^{\mathbf{N}} \times \{0, 2\}^{\mathbf{N}}, \sigma(a) := (\sigma'(a), \sigma''(a))$$

Per le cifre di  $a$  con posto dispari:

$$\sigma'(a)_n := a_{2n-1}$$

Per le cifre di  $a$  con posto pari:

$$\sigma''(a)_n := a_{2n}$$

Veniamo alla funzione  $\gamma$ . Il suo valore in un punto  $x \in \mathcal{C}$  si calcola in tre tappe:

1. trovare lo sviluppo ternario  $a = T^{-1}(x)$ ;
2. sdoppiare a tramite  $\sigma$  ottenendo  $(b, c) = (\sigma'(a), \sigma''(a))$ ;
3. calcolare la “binarizzazione” di  $b$  e di  $c$  con la funzione  $B$  introdotta in precedenza:  $\gamma(x) = (B(b), B(c))$ .

Riassumendo, la definizione di  $\gamma(x)$  è:

$$\gamma(x) := (B(\sigma'(T^{-1}(x))), B(\sigma''(T^{-1}(x)))) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

Calcoliamola in alcuni punti notevoli:

$$x = 0, a = (0, 0, 0, \dots), b = c = (0, 0, 0, \dots), B(b) = B(c) = 0, \gamma(0) = (0, 0);$$

$$x = 1, a = (2, 2, 2, \dots), b = c = (2, 2, 2, \dots), B(b) = B(c) = 1, 1111 \dots_{base\ due} = 1, \gamma(1) = (1, 1);$$

$$x = 1/3, a = (0, 2, 2, 2, \dots), b = (0, 2, 2, 2, \dots), c = (2, 2, 2, \dots), B(b) = 0, 01111 \dots_{base\ due} = \frac{1}{2}, B(c) = 1, \gamma(1/3) = (1/2, 1);$$

$$x = 2/3, a = (2, 0, 0, 0, \dots), b = a, c = (0, 0, 0, \dots), B(b) = 0, 1_{base\ due} = \frac{1}{2}, B(c) = 0, \gamma(2/3) = (1/2, 0).$$

Indaghiamo un po' a fondo su come si comporta negli estremi  $[x', x'' = x' + \frac{1}{3^n}]$  di uno degli intervallini che vengono scartati per costruire  $\mathbf{C}_n$ . Le rappresentazioni ternarie di  $x'$  e  $x''$  coincidono fino al posto  $n - 1$  e poi quella di  $x'$  prosegue con 0222... mentre quella di  $x''$  con 2000... Il risultato è lievemente diverso a seconda che  $n$  sia pari o dispari. Per esempio, supponiamo  $n = 2k$ , con  $k > 1$ . Allora

$$a = (t_1, t_2, \dots, t_{2k-2}, t_{2k-1}, 0, 2, 2, 2 \dots)$$

$$b = (t_1, t_2, \dots, t_{2k-2}, t_{2k-1}, 2, 0, 0, 0 \dots)$$

e quindi

$$\sigma'(a) = (t_1, t_3, \dots, t_{2k-1}, 2, 2, 2 \dots) \quad \sigma''(a) = (t_2, t_4, \dots, t_{2k-2}, 0, 2, 2 \dots)$$

$$\sigma'(b) = (t_1, t_3, \dots, t_{2k-1}, 0, 0, 0 \dots) \quad \sigma''(b) = (t_2, t_4, \dots, t_{2k-2}, 2, 0, 0 \dots)$$

Confrontiamo le binarizzazioni:

$$B(\sigma'(a)) - B(\sigma'(b)) = 0, \underbrace{000 \dots}_{k \text{ cifre}} 111 \dots \text{base due} = \frac{1}{2^k}$$

$$B(\sigma''(a)) - B(\sigma''(b)) = 0, \underbrace{000 \dots}_{k \text{ cifre}} 111 \dots \text{base due} - 0, \underbrace{000 \dots}_{k \text{ cifre}} 1000 \dots \text{base due} = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k} = 0$$

Quindi

$$n = 2k, k \geq 1 \Rightarrow \gamma(x') = \gamma(x'') + \left(\frac{1}{2^k}, 0\right)$$

Il caso di  $n$  dispari è analogo.

$$n = 2k + 1, k \geq 1 \Rightarrow \gamma(x') = \gamma(x'') + \left(0, \frac{1}{2^k}\right)$$

In ogni modo  $\gamma$  ha o la stessa ascissa o la stessa ordinata sugli estremi  $x'$  e  $x''$ . L'applicazione è *suriettiva*.

Infatti, siano  $y, z \in [0, 1]$ . Abbiamo già notato che la composizione  $B \circ T^{-1}$  è suriettiva. Esistono dunque  $y', z' \in \mathcal{C}$  tali che  $B(T^{-1})(y') = y$  e  $B(T^{-1})(z') = z$ . “Alterniamo” le cifre della rappresentazione ternaria di  $y'$  e  $z'$ , dati  $b = T^{-1}(y')$  e  $c = T^{-1}(z')$ , definiamo

$$a := (b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, \dots) \quad e \quad x := T(a)$$

Si ha allora  $\sigma(a) = (b, c)$  e quindi

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= (B(\sigma'(T^{-1}(x))), B(\sigma''(T^{-1}(x)))) = (B(\sigma'(a)), B(\sigma''(a))) = \\ &= (B(b), B(c)) = (B(T^{-1}(y')), B(T^{-1}(z'))) = \\ &= (y, z) \end{aligned}$$

$\gamma$  non è iniettiva. La funzione  $\gamma$  è anche continua. Siano infatti  $x, y \in \mathcal{C}$ ,  $a = T^{-1}(x)$ ,  $b = T^{-1}(y)$ . Allora, per quanto già sappiamo su  $T$  e su  $\sigma^{-1}$

$$\begin{aligned} |x - y| < \frac{1}{3^{2n}} &\Rightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{2n} = b_{2n} \Rightarrow \\ \sigma'(a)_1 &= \sigma'(b)_1, \dots, \sigma'(a)_n = \sigma'(b)_n \\ \sigma''(a)_1 &= \sigma''(b)_1, \dots, \sigma''(a)_n = \sigma''(b)_n \end{aligned}$$

(5)



e quindi, per la proprietà di  $B$ :

$$|x - y| < \frac{1}{3^{2n}} \Rightarrow$$

$$|\gamma'(x) - \gamma'(y)| = |B(\sigma'(x)) - B(\sigma'(y))| \leq \frac{1}{2^n} |\gamma''(x) - \gamma''(y)|$$

$$|B(\sigma''(x)) - B(\sigma''(y))| \leq \frac{1}{2^n}$$

(6)

Se adottiamo su  $\mathbf{R}^2$  la norma  $\|u_1, u_2\|_\infty := \max |u_i|$   $|x - y| < \frac{1}{3^{2n}} \Rightarrow \|\gamma_1, \gamma_2\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$

e questo dimostra la continuità.

Anzi, questa è una stima del modulo di continuità uniforme.

Veniamo finalmente alla definizione completa della curva di Peano di cui una iterazione nella figura 9.  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ . Abbiamo già detto che  $c(x)$  coincide con  $\gamma(x)$  per  $x \in \mathcal{C}$ . Prendiamo ora un punto  $x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}$  e siano  $x'$  e  $x''$  gli estremi dell'intervallino contenente  $x$  la cui parte interna viene tolta a  $C_{n-1}$  nel costruire  $C_n$  (sia  $n$  che l'intervallino sono determinati univocamente da  $x$ ):

$$x' < x < x'' = x' + \frac{1}{3^n}$$

Definiamo come  $c(x)$  quel punto di  $[0, 1] \times [0, 1]$  che divide il segmento che congiunge  $\gamma(x')$  con  $\gamma(x'')$  nella stessa proporzione in cui  $x$  divide il segmento  $[x', x'']$ : (questo procedimento viene detto interpolazione lineare). In formula:

$$c(x) := \frac{x - x'}{x'' - x'} \gamma(x'') + \frac{x'' - x}{x'' - x'} \gamma(x')$$

In generale, se  $u, v \in \mathbf{R}^n$ , il punto che divide il segmento  $[u, v]$  in parti proporzionali a  $\lambda, \mu > 0$  è  $\frac{\lambda u + \mu v}{\lambda + \mu}$ . Visto che  $\gamma(x')$  e  $\gamma(x'')$  appartengono a  $[0, 1] \times [0, 1]$ , anche tutto il segmento che li congiunge giace nel quadrato. Tale segmento è addirittura parallelo a uno degli assi, come abbiamo visto.

**Teorema 6**  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  come sopra definita è continua.

**Dimostrazione:**

Sia  $\bar{x} \in [0, 1]$  e studiamo la continuità a destra di  $c$  nel punto  $\bar{x}$ . La continuità a sinistra si tratta analogamente. Se  $\bar{x} \notin \mathcal{C}$  in un intorno di  $\bar{x}$  la  $c$  è lineare (affine) e quindi continua.

Supponiamo pertanto che  $\bar{x} \in \mathcal{C}$ . Sia  $n \in \mathbf{N}$  e consideriamo l'intervallo  $]\bar{x}, \bar{x} + 3^{-2n}[$ . Possono succedere due cose:

1. In quell'intervallo non cadono punti di  $\mathcal{C}$  ; questo vuol dire che  $\bar{x}$  è l'estremo sinistro di uno degli intervalli e che vengono tolti per produrre  $\mathcal{C}$ ; perciò a destra di  $\bar{x}$  la funzione  $c$  è lineare (affine) e pertanto è continua a destra in  $\bar{x}$ .
2. In quell'intervallo cade almeno un punto  $x_1 \in \mathcal{C}$ . Allora qualunque  $x \in [\bar{x}, x_1]$  o è un punto di  $\mathcal{C}$  e quindi  $\|c(x) - c(\bar{x})\|_\infty \leq 2^{-n}$ , oppure appartiene a qualche intervallino  $]x', x''[$  di quelli che vengono tolti per fare  $\mathcal{C}$ .

Entrambi gli estremi  $x', x''$  sono in  $[x, x_1]$ , quindi entrambi  $\gamma(x'), \gamma(x'')$  distano da  $\gamma(\bar{x})$  meno di  $2^{-n}$  (nella norma  $\|\cdot\|_\infty$ ). Il punto  $c(x)$ , appartenendo al segmento di estremi  $\gamma(x')$  e  $\gamma(x'')$  e quindi anche il suo punto  $c(x)$  dista da  $\gamma(\bar{x})$  meno di  $2^{-n}$ . Infatti le sfere rispetto a una norma sono sempre *convexe*, cioè se contengono due punti contengono anche tutto il segmento che li congiunge; qui addirittura la sfera è un quadrato e il segmento è parallelo ad uno dei lati.  $\square$

## 5 Proprietà della curva di Peano

La curva di Peano gode delle seguenti proprietà:

- è continua in quanto limite uniforme di funzioni continue, cioè è una curva nel senso matematico del termine;
- ha lunghezza infinita
- non è rettificabile.

Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico (ad esempio, il piano o uno spazio euclideo) si può usare la metrica stessa per definire la lunghezza di una curva. Sia data una curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow X$  e una partizione dell'intervallo  $[a, b]$  cioè un insieme finito di punti  $\rho = \{t_k\}_k^n$  tale che:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Allora si può definire la poligonale, cioè una curva che è l'unione dei segmenti aventi vertici l'immagine degli elementi della partizione tramite  $\varphi$ . In pratica la poligonale è una curva spezzata i cui vertici appartengono alla curva originale. Più i vertici della poligonale sono numerosi e più la sua lunghezza approssimerà quella della curva.

Possiamo definire la lunghezza della curva  $f$  come estremo superiore della lunghezza della poligonale al variare della partizione  $\rho$ :

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \sup_{\rho} [d(\varphi(t_0), \varphi(t_1)) + \dots + d(\varphi(t_{n-1}), \varphi(t_n))] = \\ &= \sup_{\rho} \sum_{i=1}^n [d(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))] = \\ &= \sup \{ \sum_{i=1}^n d(\varphi(t_i), \varphi(t_{i-1})) : n \in \mathbb{N} \text{ e } a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \} \end{aligned}$$

Se tale valore non è infinito, la curva si dice rettificabile. Le curve di Peano e di Koch non sono rettificabili.

Mostrerò che la curva di Peano, intesa come limite di curve ricorsive, ha lunghezza infinita.

$$\ell(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(P_n) = \infty$$

I vertici sono  $4^n$ , includendo, per comodità, tra i vertici i punti estremi dei segmenti adiacenti che formano la poligonale. Quindi i lati sono  $4^n - 1$ . Essendo ciascuno di lunghezza  $\frac{1}{2^n}$ , la n-esima approssimazione è lunga

$$\ell(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 1) \cdot \frac{1}{2^n}. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \ell(P) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 1) \cdot \frac{1}{2^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n - \frac{1}{2^n} = \infty \end{aligned} \quad (8)$$

(10)

- Possiede infiniti punti doppi [4]
- Non è derivabile in nessun punto, infatti una curva derivabile in un punto  $x_0$  vista su scale sempre più piccole intorno a  $x_0$  tende ad essere vicina ad una retta passante per quel punto, la curva di Peano, invece, vista su qualsiasi scala è identica a se stessa.

Bisogna citare a questo riguardo due grandi matematici che, pur non avendo contribuito allo studio di questa figura, avevano un senso sviluppato del concreto. Lévy <sup>30</sup> scriveva: “Senza dubbio la nostra intuizione prevedeva che l’assenza di tangente e la lunghezza infinita della curva fossero legate a dei tornanti infinitamente piccoli che non si può pensare di disegnare. Ma si rimane confusi per il fatto che la nostra immaginazione non riesce nemmeno a spingersi oltre i primi passi nella costruzione di questi tornanti infinitamente piccoli.” Nello stesso spirito, riassumendo uno studio appassionante, Steinhaus <sup>31</sup> scriveva: “Ci avviciniamo alla realtà, considerando che la maggior parte degli archi che s’incontrano nella natura sono non rettificabili. Questa affermazione contrasta con la credenza che gli archi non rettificabili siano un’invenzione dei matematici, e che gli archi naturali siano rettificabili: si verifica invece il contrario.”

---

<sup>30</sup>Paul Lévy (1876-1971), matematico francese

<sup>31</sup>Hugo Steinhaus (1887-1972), matematico polacco

## 6 Le curve FASS e la tassellazione del piano

*FASS* [13] è l'acronimo di *space-Filling self-Avoiding, Simple, Self-similar*. Le curve *FASS* sono quindi le curve che riempiono lo spazio, (o il compatto  $\mathbf{Q} = [0, 1] \times [0, 1]$ ), non si intersecano, sono semplici e auto-simili. 9.10 Si può congetturare che siano infinite. Il problema della generazione delle curve *FASS* è connesso a quello della tassellazione del piano.

## 7 La interpolazione frattale

M. Barnsley osserva a proposito della interpolazione frattale che la geometria euclidea, la trigonometria e l'analisi ci hanno insegnato a pensare la modellazione delle strutture che vediamo nel mondo reale in termini di rette, cerchi, parabole e altre curve semplici. Le funzioni elementari come le funzioni trigonometriche e le funzioni razionali hanno le loro radici nella geometria elementare. Condividono la caratteristica che quando il grafico è abbastanza ingrandito, appaiono localmente come rette. Nell'introdurre le funzioni di interpolazione frattale sostiene che l'interpolazione frattale può essere usata per approssimare profili di montagne, nuvole, stalattiti, profili di orizzonti sopra le foreste . . . .

Per adattare dati sperimentali la interpolazione frattale fornisce un nuovo metodo, quando non bastano i *minimi quadrati* come per la turbolenza di un jet o i parametri di un elettroencefalogramma. Si dice *contrazione* una mappa  $f$  che soddisfa la condizione:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad , 0 < L < 1$$

Si dice *IFS* (iterated function system) un qualunque insieme di mappe contrattive  $\bigcup_{i=1}^n S_i$  Barnsley assegna poi l'algoritmo deterministico per il codice IFS per generare *pattern* ricorsivi che riempiono il compatto  $\mathbf{Q} = [0, 1] \times [0, 1]$ . Può essere realizzato col software `ifsAttractor`

## 8 La tassellazione di Perron

Un numero algebrico intero è un numero (complesso) che è radice di un polinomio monico a coefficienti interi. Un numero di Perron <sup>32</sup> è un numero algebrico intero strettamente maggiore in modulo dei suoi coniugati di Galois (le altre radici del suo polinomio minimo), ad eccezione del suo complesso coniugato.

Nelle tassellazioni del piano auto-simili (con qualche restrizione sulla natura della tassellazione) i numeri di Perron codificano la grandezza relativa di un tassello e gli elementi della sua dissezione. È stato dimostrato

---

<sup>32</sup>Oskar Perron (1880-1975), matematico tedesco

che l'esistenza di un numero di Perron è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una tassellazione di Perron. Molte tassellazioni di Perron generano anche curve *FASS*.

**Teorema 7** *L'espansione di una tassellazione auto-simili è un numero di Perron*

**Teorema 8**  $\forall \lambda$  di Perron  $\exists$  una tassellazione di espansione  $\lambda$

**Teorema 9**  $\lambda$  è l'espansione di una tassellazione auto-simile invariante per una rotazione  $e^{\frac{2\pi i}{n}}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ )  $\iff$

$o \lambda \notin \mathbf{R}$  e  $\lambda$  è un complesso di Perron per cui  $e^{\frac{(2\pi i)}{n}} \in Q[\lambda]$

$o \lambda \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda e^{\frac{2\pi i}{n}}$  è un complesso di Perron e  $e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbf{Q}[\lambda e^{\frac{2\pi i}{n}}]$ .



Figura 10: Oskar Perron

## 9 Esperimenti al computer: Curve di Peano tracciate con L-sistema

### 9.1 Il software

È notorio che la scienza del caos si avvale in maniera essenziale del computer, per la visualizzazione degli oggetti che studia. Riprendendo le considerazioni di Cayley<sup>33</sup> che generalizzavano al campo complesso il metodo delle tangenti di Newton<sup>34</sup> per la risoluzione numerica di una equazione, Julia<sup>35</sup> iniziò lo studio degli oggetti frattali, con la iterazione di successioni su numeri complessi. Ma dovette fermarsi, perchè non disponeva del mezzo tecnico per visualizzare i suoi risultati: il computer, appunto. Nel prosieguo verrà illustrato l' L-sistema che si propone di fornire un codice conciso per la generazione di una immagine della curva di Peano e analoghe. Quindi il software specifico e alcune note storico-biografiche.

<sup>33</sup> Arthur Cayley (1821-1895), matematico inglese

<sup>34</sup> Isaac Newton (1642-1727) matematico-fisico inglese

<sup>35</sup> Gaston Julia (1893-1978), matematico francese

## 9.2 L-sistema

Gli L-sistemi costituiscono un formalismo matematico proposto da Lindenmayer nel 1968, come base per una teoria assiomatica dello sviluppo biologico [13].

Un testo fondamentale al riguardo è *Algorithmic beauty of Plants*. Più recentemente gli L-sistemi hanno trovato applicazione nella computer-grafica (Smith 1984; Prusinkiewicz and Hanan 1989; Prusinkiewicz e Lindenmayer 1991). Due aree principali di applicazioni riguardano la generazione di frattali e di modelli realistici di piante.

Un L-sistema o sistema di Lindenmayer è una grammatica formale per generare stringhe. (Ossia è un insieme di regole che sostituiscono X con  $XYX$ ).

Applicando ricorsivamente le regole del L-sistema ad una stringa iniziale, può essere creata una stringa con struttura frattale. Interpretando questa stringa come un insieme di comandi grafici, il frattale può essere visualizzato.

Gli L-sistemi sono dunque molto utili per generare strutture di piante realistiche.

Basilare per un L-sistema, è la nozione di riscrittura, dove l'idea di base è di definire oggetti complessi con successive sostituzioni di parti di un oggetto semplice usando un insieme di regole di riscrittura o produzioni. La riscrittura può essere eseguita ricorsivamente.

Il caso più semplice di L-sistema è detto D0L-sistema (D sta per deterministico e di 0-contesto o Libero dal contesto nel senso di Chomsky <sup>36</sup>). Per fornire una comprensione intuitiva dell'idea principale che sta dietro un D0L-sistema consideriamo questo esempio da Prusinkiewicz e Lindenmayer (1991) Consideriamo stringhe delle lettere  $a$  e  $b$  (esse possono ripetersi molte volte in una stringa). Per ogni lettera specifichiamo una regola di riscrittura. La regola  $a \rightarrow ab$  significa che la lettera  $a$  è da rimpiazzarsi con  $ab$ , e la regola  $b \rightarrow a$  significa che la lettera  $b$  è da rimpiazzarsi con  $a$ . È facile vedere che si tratta di una successione di liste alla Fibonacci <sup>37</sup>, per la loro stessa regola di costruzione. Il processo inizia da  $a$  come assioma. Assumiamo che consista della lettera  $b$ . Nel primo passo  $b$  viene sostituito con la regola  $b \rightarrow a$ . Nel secondo  $a$  viene sostituito con  $ab$ ; quindi entrambe le lettere vengono contemporaneamente sostituite e ne risulta  $aba$ . Poi si genera  $abaab$  che a sua volta dà  $abaababa$ , poi  $abaababaabaab$ , e così via.

d0l.fig

---

<sup>36</sup>Noam Chomsky (1928-vivente), linguista americano

<sup>37</sup>Leonardo Fibonacci (~ 1170- ~ 1250), matematico italiano

La lunghezza di queste stringhe costituisce la famosa successione di Fibonacci.

Mediante un linguaggio di controllo di una grafica a tartaruga ed iniziando con una stringa di un *assioma* iniziale, vengono eseguite sostituzioni della stringa nel numero specificato di volte (l'ordine), e viene disegnato il risultato [19].

I vari software disponibili gratuitamente su *internet* per tracciare le curve *FASS* sono tanti. Basti citare quelli che ho sperimentato io, sul mio sistema operativo **Linux**:

- *xfractint* del Stone Soup Group
- *MuPAD* di Sciface
- *lplants* di Jörg Schulenburg
- *drgeo* di Hilaire Fernandes con script *Guile*, dialetto di *Scheme*, dialetto di *LISP*

Questi frattali sono costruiti da segmenti rettilinei utilizzando regole specificate nei comandi di tracciamento. A partire da una stringa iniziale, l'assioma, vengono applicate le regole di trasformazione un numero di volte specificato, per produrre la stringa del comando finale, usata per disegnare l'immagine.

Ogni istruzione L-System nel file contiene una specificazione dell'angolo, l'assioma e le regole di trasformazione. Quelle che seguono sono le specifiche per *xfractint*; è semplice la traduzione in codice *MuPAD* e in *lplants*, più complessa in *Guile* perchè richiede la conoscenza del *LISP*. L'istruzione "angle n" pone l'angolo unitario a  $(360/n)^\circ$ ;  $n$  deve essere un intero più grande di 2 e minore di 50. La "stringa di assioma" definisce l'assioma. Le regole di trasformazione sono specificate come "a=stringa" e convertono il singolo carattere "a" nella "stringa". Se più di una regola viene specificata per un singolo carattere

Ecco un esempio di L-sistema:

```
Dragon \{           ; Nome del programma L-sistema, \{ indica la partenza
  Angle 8          ; Specifica l'angolo da incrementare di 45 gradi
  Axiom FX         ; Stringa di caratteri iniziale
  F=              ; Prima regola: Cancella 'F'
  y+=FX--FY+      ; Cambia 'y' in "+fx--fy+"
  x=-FX++FY-      ; Simile trasformazione su 'x'
\}                ; \} finale sta a indicare la fine
```

I comandi standard per disegnare sono:

1. F Disegna in avanti
2. G Muovi in avanti (senza disegnare)
3. + Aumenta dell' angolo



4. - Diminuisce dell'angolo
5. — Prova a ruotare di  $180^\circ$ . (Se l'angolo è dispari,
6. la rotazione sarà la più grande possibile al di sotto di  $180^\circ$

Il matematico Hilbert (1862-1943) studiò una curva simile alla curva già studiata da Peano. Si tratta di una curva costruita tramite un processo iterativo che finisce per riempire l'intero quadrato di lato unitario. 9.6

Ci sono però delle importanti differenze con la curva di Peano. La costruzione seguente non può essere ottenuta applicando un certo numero di trasformazioni geometriche. Basta infatti osservare che i passi della costruzione non sono autosimili, ovvero non sono divisibili in un numero di parti simili all'intera figura. Per ottenere la Curva non si può quindi ricorrere alla tecnica degli IFS (Iterated function system) ma bisogna utilizzare un'altra tecnica, quella degli L-system.

### 9.3 La storia della zuppa di pietre

C'era una volta, [19] in qualche posto nell'Europa orientale, una grande carestia. La gente si impossessava gelosamente del cibo che poteva trovare, rubandolo anche agli amici e ai vicini. Un giorno un venditore ambulante arrivò con il suo carro all'interno di un villaggio, vendette un po' della sua merce e cominciò a porre domande, come se avesse intenzione di pernottare là. "Non c'è una briciola da mangiare nell'intera provincia" gli venne detto. "Meglio andarsene".

"Oh, ho tutto ciò che mi occorre", disse. "Infatti, pensavo di farmi un po' di zuppa di pietre da condividere con tutti voi".

Tirò fuori una pentola di ferro dal suo carro, la riempì d'acqua e fece un fuoco sotto di essa. Poi, con grande cerimonia, prese una normalissima pietra da un sacco di velluto e la lasciò cadere nell'acqua. Quindi, molti abitanti del villaggio attirati dal rumore del cibo arrivarono sulla piazza o guardavano dalla finestra. Appena il venditore ambulante sniffò il brodo e si leccò le labbra gli affamati cominciarono a dimenticare il loro scetticismo.

"Ahh," disse il venditore a se stesso piuttosto forte "Come mi piace una gustosa zuppa di pietre, zuppa di pietre col cavolo – questo è difficile da trovare".

Subito uno del villaggio si avvicinò con esitazione, tenendo un cavolo che aveva tenuto nel suo sito nascosto, e lo aggiunse al piatto.

"Eccellente" gridò il venditore ambulante. "Sai che una volta avevo una zuppa di pietre col cavolo e un po' di sale e anche una bistecca, e fu un piatto da re".

Il macellaio del villaggio riuscì a trovare un po' di bistecca salata ... e così arrivarono patate, cipolle, carote, funghi e così via, finché ci fu infatti un delizioso pasto per tutti. Gli abitanti del villaggio offrirono al venditore ambulante una grande quantità di monete per la zuppa magica, ma rifiutò

di venderla e si mise in viaggio per il giorno dopo. E, da allora, molto tempo dopo che la carestia fu terminata, si ricordarono della eccezionale zuppa che avevano avuto.

Ecco il modo con cui è cresciuto il software libero Fractint, con una buona dose di magia, ma senza l'elemento dell'inganno. Non sarebbe accaduto, naturalmente, senza Benoît Mandelbrot

e l'esplosione dell'interesse per la grafica frattale, nata dal suo lavoro all'IBM Watson Research Center. O senza quei maghi che si accorsero per primi che avrebbero potuto compiere i calcoli di Mandelbrot con l'aritmetica intera. O senza i matematici che hanno costituito la comunità *hacker* americana. Oppure senza quegli esperti di grafica . . .

O se non ci fosse stato **Giuseppe Peano** ad aprire la strada della teoria dei *sistemi dinamici* e dei *frattali ovunque*.

O . . .

#### 9.4 Due parole sugli autori del software xfractint

Due parole su *Stone soup group*, il gruppo della zuppa di pietre, autore del software libero e open-source *XFractint*. *XFractint* è la versione per X-Window nel sistema operativo Linux di Fractint ed è quella che io ho adoperato. Il programma deve il suo nome al fatto che ha una lunga eredità e risale al tempo del microprocessore 8088, che lavorava in aritmetica intera e gli autori del programma non potevano permettersi di acquistare il costoso coprocessore matematico. Esso è il risultato di una sinergia tra i principali autori, molti contributori e i sorgenti pubblicati. Tutti i principali autori hanno avuto tra le mani il codice in molti aspetti. Comunque ogni autore ha certe aree di contributo e di creatività.

Michael Abrash, Rees Acheson, Joseph Albrecht, Kevin Allen, Humberto Baptista, Steve Bennett, Rob Beyer, Francois Blais, Scott D. Boyd, Dennis Bragg, Pieter Branderhorst, Juan J. Buhler, Mike Burkey, John Bridges, Fulvio Cappelli, Brian Corbino, Lee Crocker, Monte Davis, Paul De Leeuw, Jean-Pierre Demailly, Chuck Ebbert, Dan Farmer, Richard Finegold, Frank Fussenegger, Sylvie Gallet, Mike Gelvin, Luciano Genero, Lawrence Gozum, David Guenther, Jay Hill, Mike Kaufman, Norman Hills, Richard Hughes, Bill Jemison, Damien M. Jones, Wesley Loewer, Adrian Mariano, Charles Marslett, George Martin, Andrew McCarthy, Joe McLain, Bob Montgomery, Bret Mulvey, Roy Murphy, Ethan Nagel, Yavuz Onder, Jonathan Osuch, Mark Peterson, Kyle Powell, Marc Reinig, Robin Bussell, Michael Sargent, Matt Saucier, Herb Savage, Ken Shirriff, Lee Skinner, Michael Snyder, Dean Soules, Kurt Sowa, Iain Stirling, Hugh Steele, John Swenson, Chris Taylor, Scott Taylor, Rich Thomson, Bert Tyler, Bill Townsend, Paul Varner, Dave Warker, Aaron Williams, Phil Wilson, Nicholas Wilt, Richard Wilton, Timothy

Wegner sono la pletora di autori e contributori.

La sinergia su un tema matematico e informatico si è realizzata proprio come per quanto riguarda il GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), dove si dimostra che *internet* è diventato un nuovo personaggio nella storia della matematica.

## 9.5 Immagini grafiche ricorsive per la generazione delle curve di Peano

Il codice informatico costituisce già, di per sè, una definizione operativa, benchè, quando viene codificato, non prescinda dal computer. Si dice che agisce quindi nel registro formale, di tipo algebrico. Ogni algoritmo, in particolare anche ogni programma per elaboratore digitale, può essere visto come una generalizzazione dell'idea di funzione.

A questo proposito, scrive Mario Livio [17] sulla proposta di Stephen Wolfram : “In un mondo abituato da più di trecento anni ad una ricerca scientifica dominata dalle equazioni matematiche in veste di “mattoni” dei nostri modelli della natura, Wolfram propone di sostituirle con agili programmi per computer”.

## 9.6 Curva di Peano-Hilbert

[15]

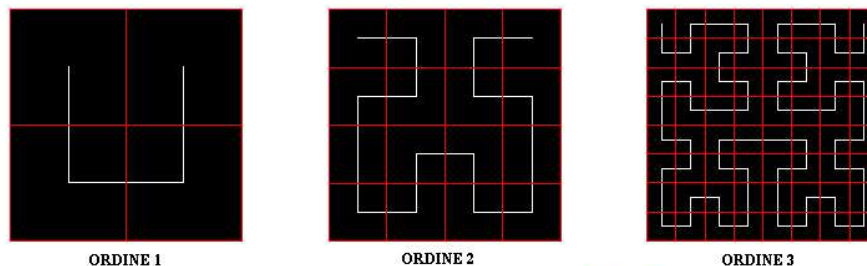


Figura 11: approssimazioni alla curva di Peano-Hilbert

La figura precedente mostra la curva di Peano-Hilbert negli ordini da 1 a 3. In ciascuna approssimazione la curva inizia al centro del quadrato 2, 3. Per ogni figura la curva inizia al centro del quadrato superiore sinistro e termina al centro del quadrato superiore destro. La curva congiunge i centri di due quadrati adiacenti. In qual modo Hilbert decise l'ordine in cui attraversare i quadrati? Consideriamo la figura di ordine 2. I quattro quadrati in alto a sinistra sono percorsi nello stesso modo di quella del primo

ordine orientata verso il basso in modo che il programma sia in posizione di percorrere i quattro inferiori destri nello stesso modo di quelli superiori sinistri. Ciò lascia il programma in posizione di attraversare i quattro superiori come l'immagine speculare di ordine 1. Se ora esaminiamo la figura di ordine 3, vedrete che viene utilizzato lo stesso piano, cominciando con i 16 superiori sinistri e finendo con i 16 superiori destri, ciascun gruppo essendo attraversato nella modalità disposta dalla curva di ordine 2.

Ecco un codice L-sistema che implementa questa curva mediana.

```
Hilbert {          ; Ken Philip, da "The Science of Fractal Images"
  axiom x
  x=-YF+XFX+FY- ; convessit\'a interna sulla sinistra durante la traccia
  y+=XF-YFY-FX+ ; convessit\'a interna sulla destra durante la traccia
  angle 4
}
```

La stringa  $x$  rappresenta la traccia della curva in una direzione e  $y$  rappresenta la traccia della curva nella direzione opposta, da cui il carattere simmetrico delle due stringhe.

Il codice LISP-Scheme-Guile-drgeo è utile per tracciare la curva con un sistema di geometria dinamica.

```
#!/usr/local/bin/guile -s
!#

(new-figure "Curva di Peano-Hilbert")

(lets Point "A" free 1.2 -2)
(lets Point "B" free 10.2 -2)
(define AB (getLength 11))

(define lato (n)
  (if (= n 1) (11) (lato (/ 11 2))))

; rotazione a sinistra
(define s (lets C rotation A B 90)
  (Segment "" extremities A C))

; rotazione a destra
(define d (lets C rotation A B 270)
  (Segment "" extremities A C))

; avanti
(define f (lets C reflexion A B))
```

```

(Segment "" extremities A C))

; tre segmenti perpendicolari uguali, convessita' a sinistra
(define a
  (lets C rotation A B 270)
  (Segment "" extremities A C))
  (lets D rotation B C 270)
  (Segment "" extremities D C))
  (lets E rotation D C 270)
  (Segment "" extremities E D))

; tre segmenti perpendicolari uguali, convessita' a destra
(define b
  (lets C rotation A B 90)
  (Segment "" extremities A C))
  (lets D rotation B C 90)
  (Segment "" extremities D C))
  (lets E rotation D C 90)
  (Segment "" extremities E D))

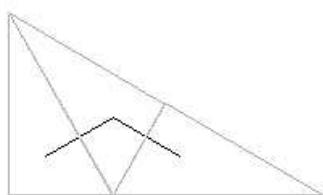
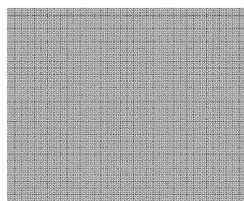
(define (iterate l)
  (apply append
    (map (lambda (x)
          (case x
            ((a) '(s b f d a f a s b f))
            ((b) '(d a f s b f b d a f))
          ))
      l)))

(define (hilb n)
  (if (= n 1) '(a) (iterate (hilb (- n 1) ))))

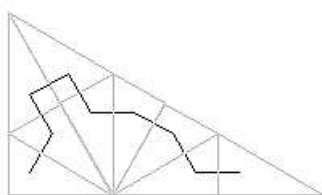
(define plot (lambda (n)
  (lato n) (hilb n))

(plot 5)

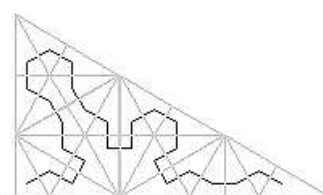
```



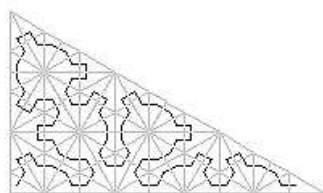
**Ordine 1**



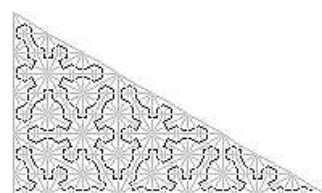
**Ordine 2**



**Ordine 3**



**Ordine 4**

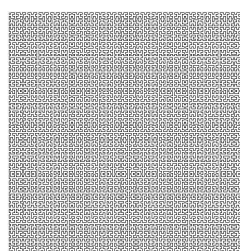
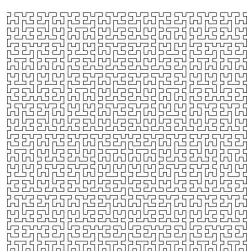
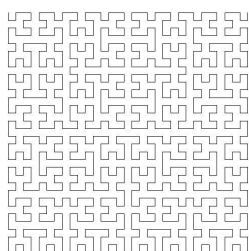


**Ordine 5**



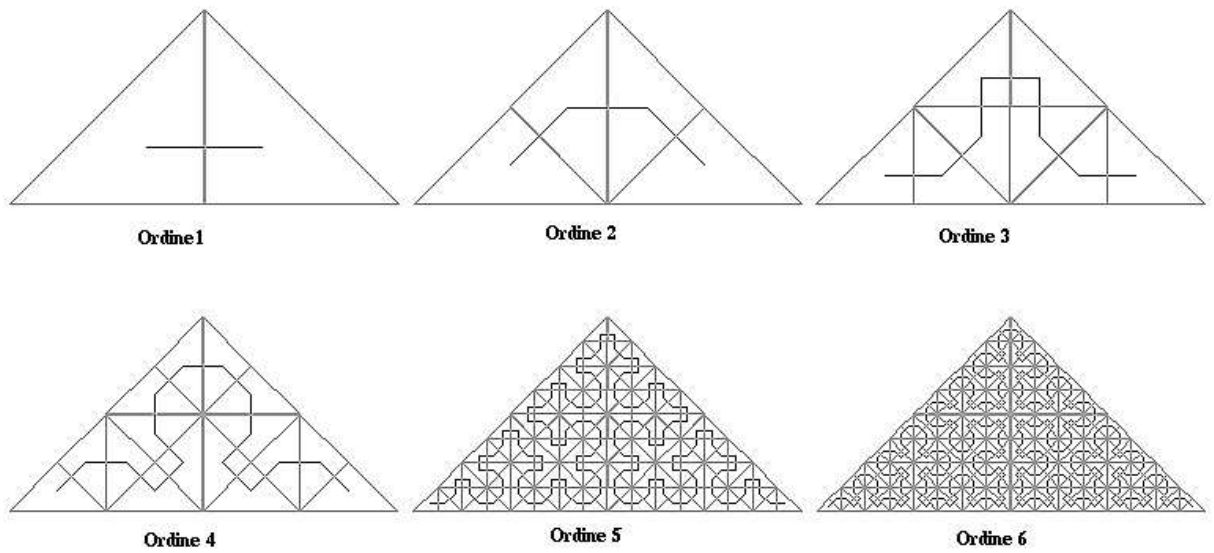
**Ordine 6**

Seguono le successive approssimazioni fino all'ottava della curva di Peano-Hilbert.



In analogia, ecco tre curve mediane costruite sui triangoli rettangoli, che al limite risultano *FASS* :

- sul semi-triangolo-equilatero, il triangolo rettangolo 30-60-90
- sul semi-quadrato, il triangolo rettangolo 45-45-90:
- sul triangolo equilatero che simmetrizza la prima

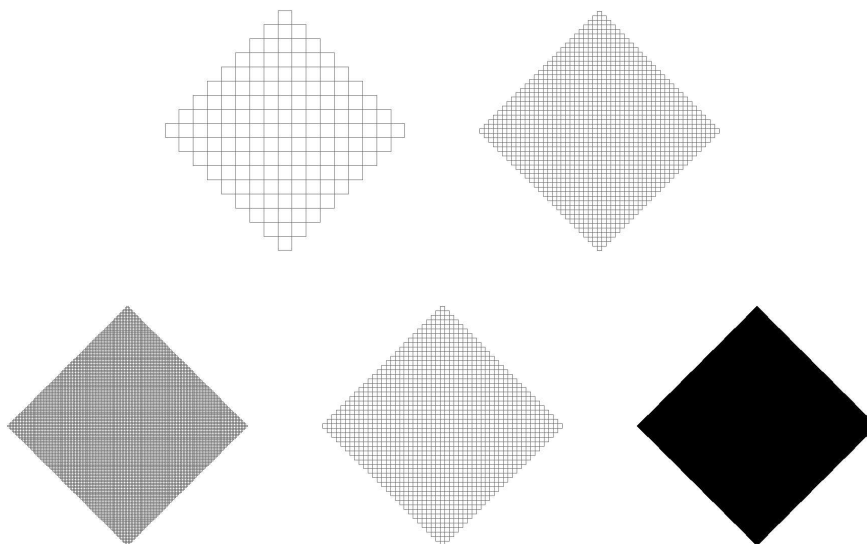


### 9.7 Curva di Peano - prima variante

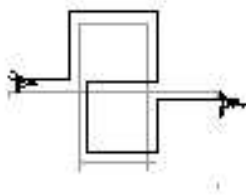
```

Peano1 { ; Adrian Mariano
; from The Fractal Geometry of Nature by Mandelbrot
Angle 4
Axiom F-F-F-F
F=F-F+F+F-F-F-F+F
}

```



La seguente figura indica come viene percorsa la curva di Peano, spiegando come vada intesa come curva:

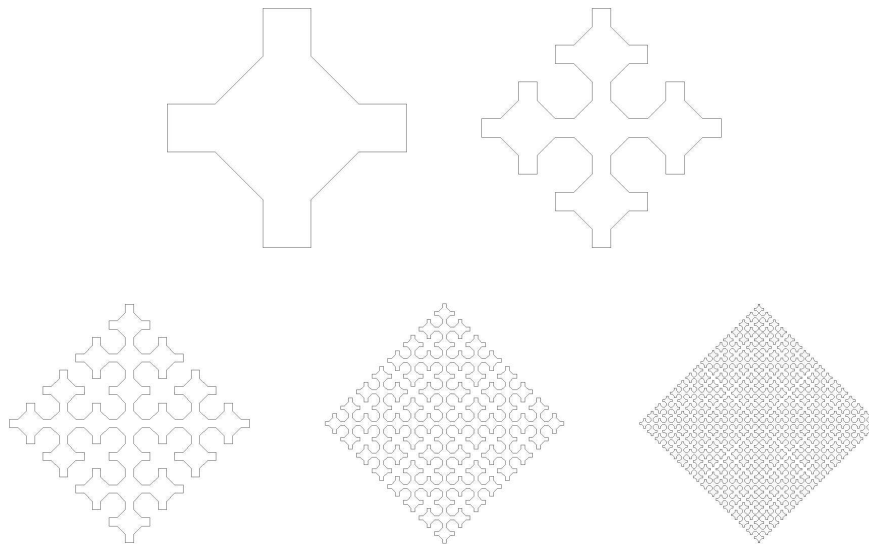


## 9.8 Curva di Peano - seconda variante

```

Peano2 { ; Adrian Mariano
; from The Fractal Geometry of Nature by Mandelbrot
Angle 8
Axiom FXY++F++FXY++F
X=XY@Q2-F@IQ2-FXY++F++FXY
Y=-@Q2F-@IQ2FX
}

```



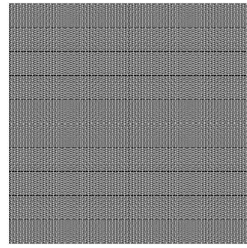
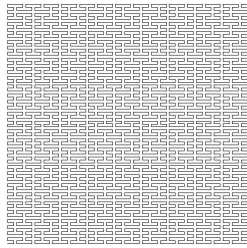
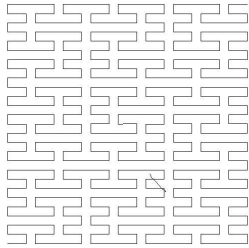
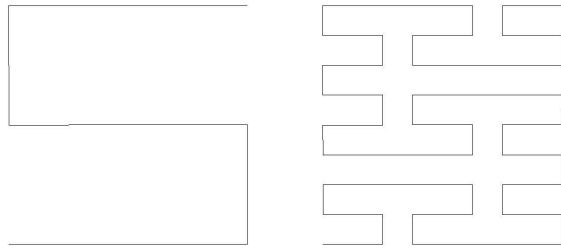
## 9.9 Curva di Peano - terza variante

```

Peano3 {
axiom x
x=XFYFX+F+YFXFY-F-XFYFX
y=YFXFY-F-XFYFX+F+YFXFY
angle 4
}

```

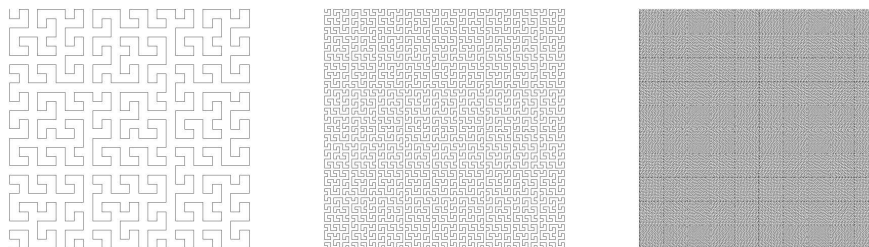
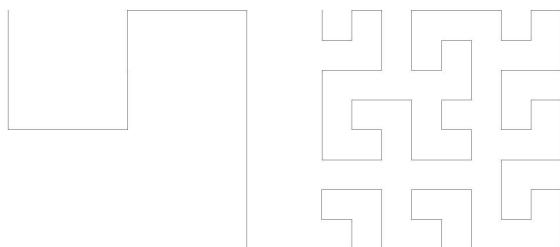




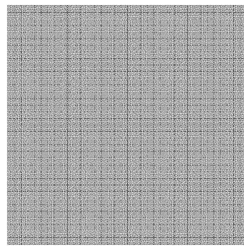
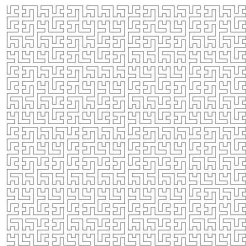
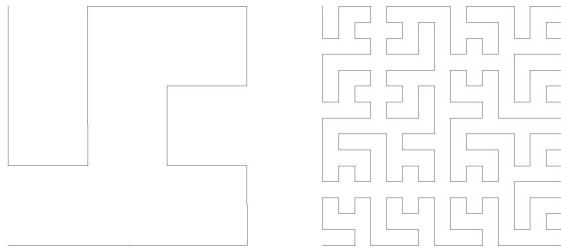
## 9.10 Curve *FASS*

Saranno visualizzati codice e immagini delle curve Fass-1, Fass-2 [?], Cross, Dekking, Terdragon, Heighway, Pentive3 [15] ottenute con L-sistema.

```
Fass1 { ; Adrian Mariano, from the Algorithmic Beauty of Plants
      ; FASS curve (3x3 tiles form macrotile), Figure 1.16a p.17
      axiom -1
      angle 4
      L=LF+RFR+FL-F-LFLFL-FRFR+
      R=-LFLF+RFRFR+F+RF-LFL-FR
    }
```



```
Fass2 { ; Adrian Mariano, from the Algorithmic Beauty of Plants
      ; FASS curve (4x4 tiles form macrotile), Figure 1.16b p.17
      angle 4
      axiom -1
      L=LFLF+RFR+FLFL-FRF-LFL-FR+F+RF-LFL-FRFRFR+
      R=-LFLFLF+RFR+FL-F-LF+RFR+FLF+RFRF-LFL-FRFR
    }
```



Cross {

  Angle 4

  Axiom FX

  X=FX+FX+FXFY-FY-

  Y=+FX+FXFY-FY-FY

  F=

}

Dekking { ; Dekking's Church

  ; Advances in Math, vol. 44, 1982, pp. 78-104

  Angle 4

  Axiom C32WC06ZC15YC06X

  F=

  W=FW+F-XFW-F+Z

  X=++F--Y-F+Z++F--Y-F+Z

  Y=++F--Y+F-X

  Z=FW+F-X

}

Terdragon {

  Angle 3 ; Occorre solo una rotazione di  $120^\circ = 360/3$

  Axiom f ; Disegna un Terdragon

  f=f+f-f ; Sostituisce un Terdragon, ruota a sinistra, un altro Terdragon,

          ; ruota a destra, un altro Terdragon

}

Heighway {

```

Angle 4
Axiom fx
x=fx+fy
y=fx-fy
f=
}

```

```

Pentive3 {
  Angle 10
  Axiom q
  f=
  p---fr++++fs--fu
  q=ft++fr----fs++
  r=++fp----fq++ft
  s=fu--fp++++fq--
  t=+fu--fp+
  u=-fq++ft-
}

```

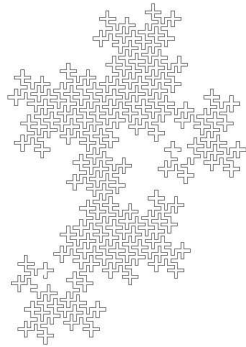


Figura 12: curva  
Cross

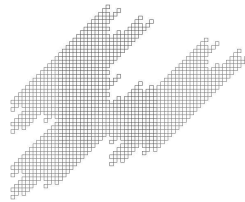


Figura 13: curva  
Chiesa di Dekking

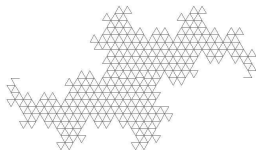


Figura 14: curva  
Terdragon



Figura 15: curva  
Heighway



Figura 16: curva  
Pentive3

## 9.11 Curve quadratica ed esagonale di Peano-Gosper

Il matematico-hacker Bill Gosper è un importante esponente della comunità *Lisp* e della rivoluzione sommersa degli hackers americani, che ha riferimento in D.E.Knuth <sup>38</sup> descritta nel libro di Levy *Hackers, gli eroi della rivoluzione informatica*. Gosper ha prodotto interessanti lavori sulla tassellazione del piano alla Escher e Penrose, sul gioco *Life* nei laboratori dell' **IA** del MIT, sull'etica hacker e sulla cucina cinese, su un algoritmo per il MCD di due polinomi, sulla rappresentazione di numeri reali con frazioni continue, sulle funzioni ipergeometriche e su due curve di Peano qui di seguito presentate.

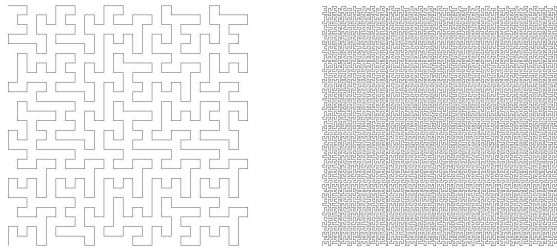


Figura 17: Bill Gosper

```
QuadGosper { ; Adrian Mariano, from the Algorithmic Beauty of Plants
    ; Quadratic Gosper curve, Figure 1.11b p.12
    angle 4
    axiom -Fr
    l=F1F1-Fr-Fr+F1+F1-Fr-FrF1+Fr+F1F1Fr-F1+Fr+F1F1+Fr-F1Fr-Fr-F1+F1+FrFr-
    r=+F1F1-Fr-Fr+F1+F1Fr+F1-FrFr-F1-Fr+F1FrFr-F1-FrF1+F1+Fr-Fr-F1+F1+FrFr
    f=
}
```

---

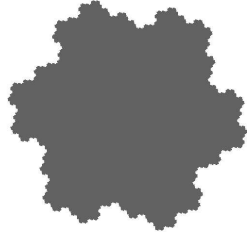
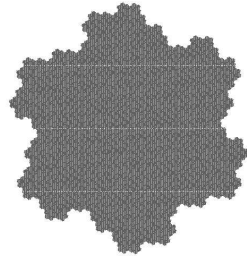
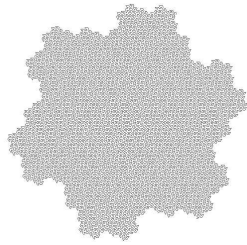
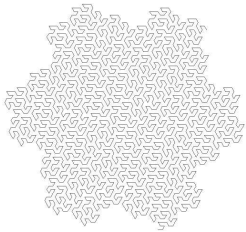
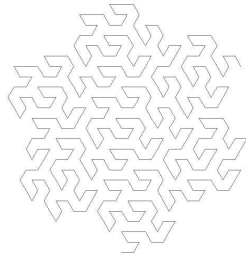
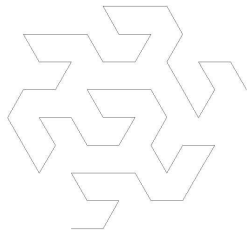
<sup>38</sup>Donald Ervin Knuth (1938-vivente), matematico americano



```

HexaGosper { ; Giancarlo Bassi, from the Algorithmic Beauty of Plants
             ; Hexagonal Gosper curve, Figure 1.11a p.12
angle 6
axiom F1
l= F1+Fr++Fr-F1--F1F1-Fr+
r=-F1+FrFr++Fr+F1--F1-Fr
f=
}

```



## 9.12 Curva di Peano tridimensionale

L'interpretazione della tartaruga di un L-sistema può essere estesa alle tre dimensioni seguendo le idee di Abelson e Di Sessa. Il concetto chiave è di rappresentare l'orientazione corrente della tartaruga nello spazio con tre vettori  $\vec{H}$ ,  $\vec{L}$ ,  $\vec{U}$  che indicano la direzione in avanti della tartaruga, la direzione alla sinistra e la direzione sopra. Questi vettori hanno lunghezza unitaria, sono perpendicolari l'un l'altro, e soddisfano l'equazione  $\vec{H} \times \vec{L} = \vec{U}$ .

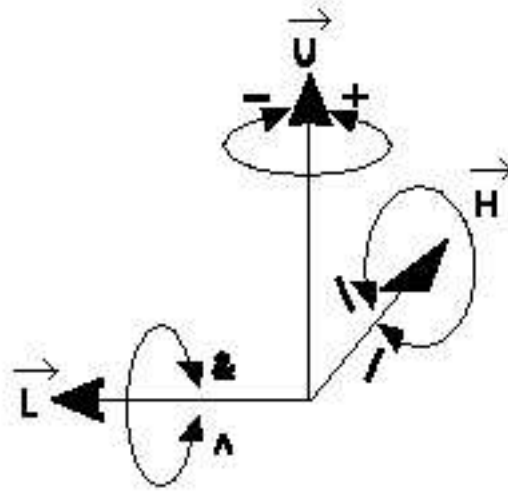


Figura 18: Controllo della tartaruga in 3 dimensioni

Le rotazioni della tartaruga sono allora espresse dall'equazione:

$$[\vec{H}' \vec{L}' \vec{U}'] = [\vec{H} \vec{L} \vec{U}] \mathbf{R}.$$

dove  $\mathbf{R}$  è una matrice di rotazione  $3 \times 3$ . Precisamente, le rotazioni di un angolo  $\alpha$  attorno ai vettori  $\vec{H}$ ,  $\vec{L}$ ,  $\vec{U}$  sono rappresentate dalle matrici:

$$R_U(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_L(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$R_H(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

I seguenti simboli controllano l'orientamento della tartaruga nello spazio

- + Ruota a sinistra dell'angolo  $\delta$ , mediante la matrice  $R_U(\delta)$ .



- - Ruota a destra dell'angolo  $\delta$ , mediante la matrice  $R_U(\delta)$ .
- & Va in giu' dell'angolo  $\delta$ , mediante la matrice di rotazione  $R_L(\delta)$ .
- ^ Va in su dell'angolo  $\delta$ , mediante la matrice di rotazione  $R_L(\delta)$ .
- \ Ruota a destra dell'angolo  $\delta$ , mediante la matrice di rotazione  $R_H(\delta)$ .
- / Ruota a sinistra dell'angolo  $\delta$ , mediante la matrice di rotazione  $R_H(\delta)$ .
- — Ruota attorno di  $180^\circ$ , mediante la matrice di rotazione  $R_U(180^\circ)$ .

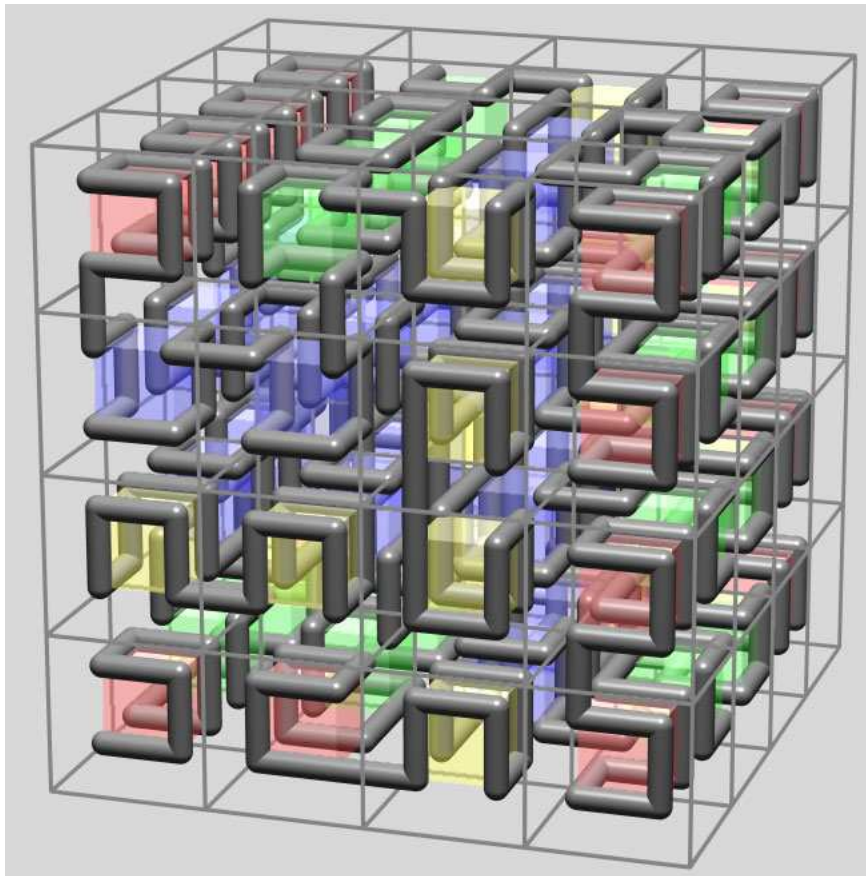


Figura 19: Un'estensione tridimensionale della curva di Peano-Hilbert. I colori rappresentano le "strutture" tridimensionali associate ai simboli A(rosso), B(blu), C(verde) e D(giallo); n. iterazioni=2,  $\delta = 90^\circ$

Codice L-sistema:

Axiom A

A  $\rightarrow B - F + CFC + F - D \& FD - F + \& \& CFC + F + B //$

B  $\rightarrow A \& FCFBFD - F - D | FB | FCFA //$

C  $\rightarrow | D | FB - F + CFA \& \& FA \& FC + F + BFD //$

D  $\rightarrow | CFB - F + B | FA \& FA \& \& FB - F + B | FC //$

## Riferimenti bibliografici

- [1] Umberto Forti *Storia della scienza, volume 5*
- [2] Emma Castelnuovo *Pentole, ombre, formiche: un viaggio nella matematica*
- [3] Wikipedia alla voce: *curva di Peano* , *dimensione frattale, dimensione topologica, L-sistema*
- [4] Benoît Mandelbrot *Gli oggetti frattali: forma, caso, dimensione*
- [5] Gabriele Lolli *I paradossi matematici : in Enciclopedia della scienza di "La Repubblica" vol.XIV*
- [6] Gorni, Caldilera *L'insieme di Cantor e la curva di Peano*
- [7] Giuseppe Scorza Dragoni *Elementi di analisi matematica, la continuità e la differenziabilità*
- [8] Peliti, Vulpiani *Prefazione a: Mandelbrot Gli oggetti frattali: forma, caso, dimensione*
- [9] Reinhold Remmert *Topologia: in "Matematica 1" Enciclopedia Feltrinelli Fischer*
- [10] P.S. Alexandrov *Fondamenti della topologia in: Hilbert Cohn-Vossen - Geometria intuitiva*
- [11] Courant, Robbins *Cos'è la matematica?*
- [12] Carlo Consoli *sito WWW:Peano, frattali e mostuosità matematiche*
- [13] Prusinkiewicz Lindenmayer *Algorithmic beauty of plants*
- [14] Gabriela Ochoa *An Introduction to Lindenmayer system*
- [15] William McWorter *Fractint L-system Spacefilling Curves*
- [16] Richard Kenyon *The construction of self-similar tilings*
- [17] Mario Livio *La sezione aurea*
- [18] Michael Barnsley *Fractals everywhere*
- [19] Monte Davis et alii *Stone Soup group's Xfractint 20.02.4 software*